Devoir surveillé n° 6 -A – type e3a
MP
samedi 23 mars 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

1. Pour tout réel x, on pose, lorsque cela est possible, $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition Δ de Γ.
   (b) Démontrer que pour tout réel x de $\Delta, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   (c) On admet que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
   Calculer $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ pour tout entier naturel n. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int\limits_0^{+\infty} t^{2n}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier l'existence de I_n.
   (b) En utilisant la question 1., calculer I_n.
3. Pour tout réel x, on pose, lorsque cela est possible, $H(x) = \int\limits_0^{+\infty} \cos(xt)\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t$.
   (a) Donner le développement en série entière de la fonction cos au voisinage de 0 et préciser son domaine de validité.
   (b) Justifier que H est définie sur $\mathbb{R}$ et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.
   On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.
4. On se propose de retrouver le résultat établi à la question **3.b)** par une autre méthode.
   (a) Démontrer que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que H est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
   (c) Retrouver l'expression de H obtenue à la question **3.b)**.

Exercice 2

1. **Questions de cours**
   (a) Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$.
   Donner, sans démonstration, la limite quand n tend vers l'infini de l'expression :
   $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$
   (b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer en fonction de m la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^m$.

(c) Soit n un entier non nul. Donner, sans démonstration, l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

* * * * * **

Soient k et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n.

On tire une boule au hasard de chaque urne et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. On suppose que les tirages sont indépendants les uns des autres.

2. Donner l'ensemble J des valeurs prises par X_n.
3. Soit $j \in J$. Évaluer $\mathbb{P}(X_n \leqslant j)$ et prouver que l'on a $\mathbb{P}(X_n = j) = \frac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$.
4. Démontrer que l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n peut s'écrire :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j)$$

5. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.
6. Lorsque $k = 1$, reconnaître la loi de X_n et vérifier la cohérence du résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 3

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $(\,|\,)$ dont la norme est notée $\|\,\|$.

1. **Questions de cours**
   (a) Soient x et y deux vecteurs de E. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|(x \mid y)| \leqslant \|x\|\|y\|$. *On pourra utiliser la fonction* $t \mapsto \|x + ty\|^2$.
   (b) Démontrer qu'on a l'égalité $|(x \mid y)| = \|x\|\|y\|$ **si, et seulement si,** les vecteurs x et y sont colinéaires.
   (c) On considère $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique et du produit scalaire canonique $(X \mid Y) = X^\mathsf{T} Y$.

   Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

* * * * * **

Pour toute la suite de l'exercice, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Partie 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $B = \{X \in \mathbb{R}^n, \|X\| \leqslant 1\}$.
On considère l'application F de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad F(X) = \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} x_i x_j$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $F(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_1 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_3x_2 = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

2. Exprimer alors $F(X)$ à l'aide de $S_1(n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ et de $S_2(n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
3. Montrer que F possède un maximum sur B que l'on notera M.
4. Montrer en utilisant la question 1. que $M = n - 1$.
5. Déterminer tous les $X \in B$ tels que $F(X) = M$.

Partie 2

On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique, orthonormale pour le produit scalaire $(X \mid Y) = X^\top Y$, de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout couple de vecteurs (X, Y) de $\mathbb{R}^n$ décomposés dans la base $\mathscr{B}$: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on pose :

$$\varphi(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} (x_i y_j + x_j y_i)$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $\varphi(X, Y) = x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$.

6. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, exprimer $F(X)$ à l'aide de φ.
7. Écrire la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ par $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.
8. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{U} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ constituée de vecteurs propres de la matrice A.
9. Vérifier que pour tout couple de vecteurs (X, Y) de $(\mathbb{R}^n)^2$, on a $\varphi(X, Y) = Y^\top A X = X^\top A Y$.
10. Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1 .
    (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice J.
    (b) En déduire une matrice diagonale Δ semblable à la matrice A.
11. Donner l'expression de $\varphi(X, Y)$ en fonction des coordonnées de X et Y dans la base $\mathcal{U}$.
12. Retrouver alors le résultat établi à la question 4.

Exercice 4

Questions préliminaires

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note : $\omega = \exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\right)$ où i est un nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z| = 1$ si, et seulement si $\overline{z} = \frac{1}{z}$.
2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Déterminer $r \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\overline{\omega^k} = \omega^r$.
3. Calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \omega^k$.
4. On considère le polynôme $P = \sum\limits_{k=1}^{n} kX^{k-1}$.
    (a) Montrer que pour tout réel x différent de 1 : $P(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$. On admet que cette expression reste vraie pour x nombre complexe différent de 1.
    (b) Montrer que : $\forall k \in [\![1, n-1]\!], P(\omega^k) = \frac{n}{\omega^k - 1}$.
    (c) En factorisant $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que : $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \left(1 - \omega^k\right) = n$.

* * * * * **

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4 .
On note F et A les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définies par :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = P(F)$$

où P est le polynôme défini à la question 4 .

5. **Réduction de la matrice F**
   (a) Donner, sans démonstration, la matrice F^k pour $k \in [\![2, n-2]\!], F^{n-1}$ puis F^n.
   On pourra étudier le cas $n = 4$ et/ou l'endomorphisme f canoniquement associé à F pour conjecturer les résultats.
   (b) On note G_F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la famille $\left(F^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Montrer que G_F est de dimension n. En donner une base.
   (c) Démontrer que $X^n - 1$ est le polynôme minimal de F.
   (d) Justifier que F est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et donner une matrice diagonale D semblable à F.
6. **Réduction de la matrice A**
   (a) Expliciter la matrice A.
   (b) Déterminer une matrice Δ diagonale semblable à la matrice A.
   (c) Déterminer le degré du polynôme minimal de A.
   En déduire que $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est une famille libre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
7. Calculer le déterminant de A. Justifier que la matrice A est inversible.
8. Soit G_A le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la famille $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
   Vérifier que $A^{-1} \in G_A$.
9. Montrer que $G_A = G_F$.
10. Vérifier que l'on a l'égalité : $A\,(F - I_n)^2 = n\,(F - I_n)$.
