Devoir surveillé n° 5 – C – type e3a
MP
samedi 22 mars 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(tx)\ \mathrm{d}t\,.$$

1. Étudier la parité des fonctions I_n.
2. Prouver que les fonctions I_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que, pour tout réel x et tout entier naturel n, $\quad I_n'(x) = -\dfrac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x)$.
4. Prouver par récurrence sur l'entier naturel k, que la fonction I_n est, pour tout entier naturel n, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

Soit n un entier naturel fixé.

5. **Calcul de $I_n(0)$**
   (a) Déterminer, pour tout entier naturel p, une relation entre $I_{p+1}(0)$ et $I_p(0)$.
   (b) En déduire l'expression de $I_n(0)$ à l'aide de factorielles.
6. Calculer la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!(n-k)!}$.
   Le résultat sera exprimé à l'aide de factorielles.
7. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 et son domaine de validité de la fonction $u \mapsto \cos(u)$.
8. Montrer que la fonction I_n est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le domaine de validité de ce développement.
   Chaque coefficient sera donné sous forme d'une intégrale et on citera avec précision les théorèmes utilisés.
9. Quel résultat démontré antérieurement retrouve-t-on alors pour la fonction I_n ?

Exercice 2

Le but de cet exercice est d'étudier pour un entier n tel que $n \geqslant 2$ les points critiques de la fonction f définie sur le domaine :

$$\mathcal{D}_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$$

par :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \ln(x_j - x_i)$$

On admettra que $\mathcal{D}_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on note :

$$\varphi(P) = 4XP'(X) - P''(X).$$

   (a) Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto \varphi(P)$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Vérifier que le polynôme $3X - 4X^3$ est un vecteur propre de φ pour une valeur propre à préciser.
   (d) Montrer que φ est diagonalisable et préciser la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

2. On s'intéresse dans cette question (et uniquement dans cette question) au cas $n = 2$. On a donc :

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y\}$$

   et :

$$f : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + y^2 - \ln(y - x) \end{array} \right)$$

   (a) Justifier que f admet des dérivées partielles premières sur $\mathcal{D}_2$ et les calculer. Justifier que f admet des dérivées partielles secondes sur $\mathcal{D}_2$ et les calculer.

   (b) Montrer que f admet un unique point critique : le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

   (c) Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   La fonction f admet-elle un extremum local en $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$?

On revient à présent au cas général avec $n \geqslant 2$.

3. On note $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}_n$. On note S le polynôme à coefficients réels défini par : $S(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note : $Q_k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (X - x_i)$. On a donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ S(X) = (X - x_k)Q_k(X).$$

   (a) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   (b) En déduire que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ 2x_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i} = 0$$

   (c) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $S'(x_k) = Q_k(x_k)$ et $S''(x_k) = 2Q'_k(x_k)$.
   (d) Justifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq k\}$, on a :

$$Q'_k(x) = Q_k(x) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x - x_i}$$

   (e) En déduire que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = 0$$

   (f) Montrer que u est un point critique de f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$S''(X) - 4XS'(X) = \lambda S(X)$$

   En observant le terme dominant de S, montrer plus précisément que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff S''(X) - 4XS'(X) + 4nS(X) = 0$$

4. (a) À l'aide des résultats des questions question 1(d) et 3(f), montrer que la fonction f admet au plus un point critique sur $\mathcal{D}_n$.
   (b) Dans le cas spécifique où $n = 3$, montrer, en utilisant le résultat de la question 1(c), que f admet un unique point critique sur $\mathcal{D}_3$ que l'on déterminera.

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $\langle x|y\rangle$ et $\|x\|$ représente la norme du vecteur x. Pour tout vecteur u non nul de E, on note φ_u l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall x \in E, \quad \varphi_u(x) = 2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle}u - x\,.$$

1. **Étude de l'application φ_u**
   (a) Montrer que φ_u est un endomorphisme de E.
   (b) En calculant $\varphi_u \circ \varphi_u$, montrer que φ_u est un automorphisme de E et déterminer φ_u^{-1}.
   (c) Soit x appartenant à E, calculer $\langle \varphi_u(x)|\varphi_u(x)\rangle$.
   (d) En déduire que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :
   $$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle \varphi_u(x)|\varphi_u(y)\rangle = \langle x|y\rangle\,.$$
   (e) On note D_u la droite vectorielle de base u et $H_u = D_u^\perp$.
   Déterminer l'image de D_u par φ_u. En déduire sans calcul que H_u est stable par φ_u.
   (f) Reconnaître alors la nature géométrique de l'endomorphisme φ_u et en donner les éléments caractéristiques.
2. **Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$**
   Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.
   (a) Donner la dimension et une base orthonormale de $H^\perp$.
   (b) Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur $H^\perp$ puis celle de la projection orthogonale sur H.
   (c) Soit v un vecteur unitaire de $H^\perp$. Écrire la matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. **Étude d'une réciproque** Soit ψ un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant :
   $$\forall x \in \Delta, \quad \psi(x) = x \text{ et } \forall x \in \Delta^\perp, \quad \psi(x) = -x\,.$$
   (a) Montrer que $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$ et que ψ conserve le produit scalaire.
   (b) Montrer qu'il existe au moins un vecteur u de E tel que $\psi = \varphi_u$.

Exercice 4

1. Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. On pose, lorsque cette intégrale existe,
   $$\gamma_n = \int_0^1 \frac{1 - t^{\frac{1}{n}}}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}t$$
   (a) Soit α un réel strictement positif.
      i. Rappeler un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $h \mapsto (1+h)^\alpha$.

ii. En déduire un équivalent, au voisinage de 1, de $t \mapsto 1 - t^\alpha$.

(b) Soit β un réel. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge.

(c) Justifier l'existence de γ_n pour tout $n \geqslant 2$.

2. On pose pour tout entier naturel m et pour tout réel u : $U_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{u^k}{k!}$. Montrer :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in \mathbb{R}^-, \quad U_{2p-1} \leqslant e^u \leqslant U_{2p}$$

3. Démontrer que l'on a, pour tout $t \in]0,1[$, pour tout $n \geqslant 2$ et tout $p \geqslant 1$:

$$1 - \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k \leqslant 1 - \exp\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right) \leqslant 1 - \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k$$

4. Prouver que, pour tout entier naturel p non nul et tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}t$ existe.

5. Démontrer que l'on a pour tout $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n^2}\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}t \leqslant \gamma_n \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}t$$

6. Soit p un entier naturel non nul. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}t\right)$.

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

7. Prouver alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\gamma_n = \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)}\,\mathrm{d}t$.

8. Prouver, que pour tout entier naturel p, l'intégrale $\int_0^1 -\ln(t)t^p\,\mathrm{d}t$ existe.

9. Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel p, $\int_0^1 -\ln(t)t^p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(p+1)^2}$.

10. Démontrer que $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^2}$.

11. Prouver enfin que : $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi^2}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. On admettra le résultat : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$.