Devoir surveillé n° 5 – B – Type Centrale, Mines
MP
samedi 22 mars 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N,]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Déterminer $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$ c'est-à-dire
$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$$
   min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(Y > n)$. En déduire $E(Y)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. Retrouver la valeur de $E(Y)$.
3. On considère une variable aléatoire N de loi géométrique de paramètre $r \in]0,1[$. On pose $s = 1 - r$. On suppose que $(N, X_1, X_2, \dots)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes. On considère la variable aléatoire Z définie par $Z = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$ c'est-à-dire
$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_{N(\omega)}(\omega))$$
   Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(Z > n)$.

Problème

Soit E un espace vectoriel euclidien (préhilbertien réel de dimension finie). On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire de E et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. Si H est une partie de E, on appelle enveloppe convexe de H, notée $\mathrm{Conv}(H)$, la plus petite partie convexe de E contenant H, c'est-à-dire l'intersection de tous les convexes de E contenant H.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $A^\top$ la matrice transposée de A et $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de A. On rappelle que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $U^\top U = I$. On rappelle également qu'une matrice symétrique réelle est dite positive si ses valeurs propres sont positives ou nulles.

On pourra identifier $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on suppose muni du produit scalaire canonique, pour lequel la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée. On note $\|.\|_2$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$: pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\|_2 = \sup_{X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\|=1} \|AX\|$$

Les parties A., B., C. et D. sont indépendantes.

A. Produit scalaire de matrices

1. Montrer que pour toute base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a la formule

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, e_i \rangle$$

2. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^\top B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, noté aussi $\langle ., . \rangle$. On note $\|.\|_1$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. *L'attention du candidat est attirée sur le fait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est désormais muni de deux normes différentes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$.*
3. Si A et B sont symétriques réelles positives, montrer que $\langle A, B \rangle \geqslant 0$. On pourra utiliser une base orthonormée de vecteurs propres de B.

B. Décomposition polaire

Soit f un endomorphisme de E. On note A la matrice de f dans une base orthonormée de E, et on note f^* l'adjoint de f.

4. Montrer que $A^\top A$ est une matrice symétrique réelle positive. Montrer que $\|A\|_2 = \sqrt{\alpha}$ où α est la plus grande valeur propre de $A^\top A$.
5. Montrer qu'il existe un endomorphisme autoadjoint positif h de E tel que $f^* \circ f = h^2$.
6. Montrer que la restriction de h à $\mathrm{Im}\, h$ induit un automorphisme de $\mathrm{Im}\, h$. On notera cet automorphisme $\tilde{h}$.
7. Montrer que $\|h(x)\| = \|f(x)\|$ pour tout $x \in E$. En déduire que $\ker h$ et $(\mathrm{Im}\, f)^\perp$ ont même dimension et qu'il existe un isomorphisme v de $\ker h$ sur $(\mathrm{Im}\, f)^\perp$ qui conserve la norme.
8. À l'aide de $\tilde{h}$ et v, construire une isométrie u de E tel que $f = u \circ h$.
9. En déduire que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = US$, où $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et S est une matrice symétrique positive.
   On admet que si A est inversible, cette écriture est unique.

C. Projeté sur un convexe compact

Soit H une partie de E, convexe et compacte, et soit $x \in E$. On note

$$\mathrm{d}(x, H) = \inf_{h \in H} \|x - h\|$$

10. Montrer qu'il existe un unique $h_0 \in H$ tel que $\mathrm{d}(x, H) = \|x - h_0\|$. Pour l'unicité, on pourra utiliser pour h_0, h_1 dans H, la fonction définie pour tout $t \in [0, 1]$ par la formule
    $q(t) = \|x - th_0 - (1 - t)h_1\|^2$.
11. Montrer que h_0 est caractérisé par la condition $\langle x - h_0, h - h_0 \rangle \leqslant 0$ pour tout $h \in H$. On pourra utiliser la même fonction q qu'à la question précédente.
    Le vecteur h_0 s'appelle projeté de x sur H.

D. Théorème de Carathéodory et compacité

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension n. On dit que $x \in E$ est une combinaison convexe des p éléments $x_1, x_2, \ldots, x_p \in E$ s'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ positifs ou nuls tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$$

12. Montrer que l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(H)$ d'une partie H de E est constituée des combinaisons convexes d'éléments de H.

On souhaite montrer que l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H.
Soit $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ une combinaison convexe de $x_1, x_2, \ldots, x_p \in H$ avec $p \geqslant n+2$.

13. Montrer qu'il existe p réels non tous nuls $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0$$

On pourra considérer la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_p - x_1)$.

14. En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de H et conclure que $\mathrm{Conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H.
On pourra considérer une suite de coefficients de la forme $\lambda_i - \theta\mu_i \geqslant 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ pour un réel θ bien choisi.

15. (a) Montrer que la partie suivante est un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\Lambda = \{(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall i \in \{1, \ldots, n+1\},\ t_i \geqslant 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1\}$$

(b) Si H est une partie compacte de E, montrer que $\mathrm{Conv}(H)$ est compacte. On pourra introduire l'application

$$f : \begin{pmatrix} H^{n+1} \times \Lambda & \to & E \\ ((x_1, \ldots, x_n), (t_1, \ldots, t_n)) & \mapsto & t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n \end{pmatrix}$$

E. Enveloppe convexe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

16. Montrer que l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$ est compacte.

On note $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|.\|_2)$.

17. Montrer que $\mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$ est contenue dans $\mathcal{B}$.

On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{B}$ telle que M n'appartient pas à $\mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$. On note N le projeté de M sur $\mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$ défini à la partie C. pour la norme $\|.\|_1$, et on pose $A = (M-N)^\top$. On écrit enfin $A = US$, avec $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et S symétrique réelle positive (question 9).

18. Montrer que pour tout $V \in \mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$, $\mathrm{Tr}(AV) \leqslant \mathrm{Tr}(AN) < \mathrm{Tr}(AM)$. En déduire que $\mathrm{Tr}(S) < \mathrm{Tr}(USM)$.
19. Montrer que $\mathrm{Tr}(MUS) \leqslant \mathrm{Tr}(S)$. On pourra appliquer le résultat de la question 1.
20. Conclure : déterminer $\mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$.