Devoir surveillé n° 5 – sujet A
MP
samedi 2 mars 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On admet l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On définit pour tout entier naturel non nul n, $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On introduit les séries entières :

$$H(x) = \sum_{n\geqslant 1} h_n x^n, \quad S(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} x^n \text{ et } T(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{h_n}{n} x^n.$$

On note I l'intervalle ouvert de convergence de la série H.

1. Soit n un entier naturel non nul. Justifier que $h_{2n} - h_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. Démontrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série H. En déduire I.
4. Déterminer les rayons de convergence des séries S et T.
5. Quel est le développement en série entière de la fonction $(g : x \mapsto \ln(1-x))$? Préciser son rayon de convergence.
6. Justifier que la fonction $(G : x \mapsto \ln(1-x)/(1-x))$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$. Établir une relation entre G et H.

Soit L la primitive de H sur l'intervalle I telle que $L(0) = 0$.

7. Exprimer L à l'aide de la fonction $(g : x \mapsto \ln(1-x))$.
8. Justifier que L est développable en série entière et expliciter son développement en série entière. On énoncera précisément le théorème utilisé.
9. En déduire une relation entre $T - S$ et L.
10. Soit $y \in]0, 1[$.
    (a) Justifier que $\displaystyle\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

$$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u + S(y) = 0$$

On pourra utiliser le développement en série entière de la fonction $(x \mapsto \ln(1-x))$.

(b) Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}.$$

(c) Justifier que

$$\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ln(1-y).$$

11. Exprimer la valeur de $T(\frac{1}{2})$ en fonction de π. Justifier votre réponse.

Exercice 2

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n+1$, le pion a une chance sur 2 de se trouver en $x+1$ et une chance sur deux de se trouver en $x-1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.
Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X_k = 1) = \mathrm{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{si pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } S_n \neq 0, \text{ on pose } T = +\infty, \\ \text{sinon, on pose } T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}. \end{cases}$$

L'événement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide.
Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \mathrm{P}(S_n = 0) \text{ et } q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \mathrm{P}(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Que représente la variable aléatoire S_n ?
2. Calculer p_0, p_1 et p_2.
3. Justifier que, si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \frac{X_k+1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
5. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n.
6. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}.$$

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

7. Montrer que $R_p \geqslant 1$.
8. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right)$$

9. Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1-x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10. Calculer q_1 et q_2.
11. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[-1,1]$. En déduire que $R_q \geqslant 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$$

12. En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

13. En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in]-1,1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1-x^2}$ en précisant son rayon de convergence.
14. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
15. En utilisant les questions 11 et 13, déterminer la valeur de $\mathrm{P}(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.
16. La variable aléatoire T est-elle d'espérance finie ?

Exercice 3

Dans ce problème, E est un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire que l'on notera $\langle . \mid . \rangle$ de norme associée $\|.\|$. Un endomorphisme u de E est une similitude de E lorsqu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout vecteur x de $E, \|u(x)\| = k\|x\|$. On dira que u est une similitude de rapport k. On notera $\mathrm{Sim}(E)$, l'ensemble des similitudes de $E, \mathrm{O}(E)$ désigne l'ensemble des isométries de E.
L'objectif de ce problème est de définir et de caractériser les similitudes d'un espace euclidien.

Partie I - Exemples, propriétés

1. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, la matrice d'une similitude u dont on précisera le rapport.
2. Interprétation géométrique avec la similitude u de la question précédente :
   Le plan $\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
   On considère les trois points $M(2,1), N(4,1), P(4,2)$ et on définit les points M', N', P' par les relations

$$u(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM}, \quad u(\overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{ON'}, \quad u(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'}$$

   Représenter les triangles MNP et $M'N'P'$ et comparer leurs aires.

3. Démontrer que tout élément de $\mathrm{Sim}(E)$ est bijectif et établir que $\mathrm{Sim}(E)$, muni de la loi de composition, est un groupe.
4. Soient u un endomorphisme de $E, \mathcal{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Démontrer que u est une isométrie de E, si et seulement si, $A^\top .A = I_n$.
   Caractériser alors par une relation matricielle une similitude de rapport k.
5. Exemple :
   Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'une similitude u dont on donnera le rapport.
   Donner la matrice de la similitude u^{-1}.
   Vérifier que, pour tout élément f de $\mathrm{O}(E), u^{-1} \circ f \circ u \in \mathrm{O}(E)$.
6. On appelle sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$, l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\|x\| = r$.
   Démontrer que si u est un endomorphisme de E tel que l'image par u de toute sphère de E de centre 0 est une sphère de E de centre 0, alors u est une similitude de E. On pourra remarquer que pour y vecteur non nul, $\left\| \dfrac{y}{\|y\|} \right\| = 1$.

Partie II - Assertions équivalentes

7. On rappelle qu'une homothétie vectorielle de E est une application de la forme $\alpha \ \mathrm{id}_E$.
   Démontrer que $u \in \mathrm{Sim}(E)$, si et seulement si, u est la composée d'une homothétie vectorielle non nulle de E et d'un élément de $\mathrm{O}(E)$.
8. Exemple :
   Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ comme produit de la matrice d'une homothétie vectorielle et de la matrice d'une isométrie de $\mathbb{R}^2$ dont on précisera la nature.
9. Démontrer que :
$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right)$$
   Soit $k > 0$ et u une application linéaire. Déduire de l'égalité précédente que u est une similitude de rapport k, si et seulement si
$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) \mid u(y) \rangle = k^2 \langle x \mid y \rangle$$
10. Démontrer que, si u est une similitude de rapport k, alors, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E
$$\langle x \mid y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x) \mid u(y) \rangle = 0$$
   On dit que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité.
   Réciproquement, on suppose que u est un endomorphisme non nul de E conservant l'orthogonalité.
   Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
   Démontrer que :
$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \langle e_i + e_j \mid e_i - e_j \rangle = 0$$
   puis que
$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|$$
   On note k la valeur commune prise par tous les $\|u(e_i)\|$.
   Démontrer que u est une similitude de rapport k.
11. Soit u une application de E dans E (non supposée linéaire) telle qu'il existe un réel $k > 0$ pour lequel :
$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) \mid u(y) \rangle = k^2 \langle x \mid y \rangle$$
   Démontrer que u est un endomorphisme de E, puis que u est une similitude de E.