Devoir surveillé n° 5
MP
samedi 22 mars 2025

Lycée Camille PISSARRO

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^\pi \cos\Big(x\sin(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner des expressions sous forme d'intégrales de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Soit la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x,t) = \cos(t)\sin\Big(x\sin(t)\Big)$$
Justifier l'existence de $\dfrac{\partial h}{\partial t}$, puis déterminer $\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.
4. En déduire que f est solution de l'équation différentielle :
$$xy'' + y' + xy = 0 \qquad (\mathbf{E})$$
5. On suppose qu'il existe une solution de $(\mathbf{E})$ développable en série entière notée $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
Montrer que $a_1 = 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:
$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$$
6. En utilisant un théorème d'interversion série intégrale, montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de f en fonction des termes de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Déduire des questions précédentes que f est l'unique solution développable en série entière de $(\mathbf{E})$ vérifiant $f(0) = \pi$.

8. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de W_n en fonction de n.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n le groupe des permutations de l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$. Une permutation de S_n sera représentée en Python par une liste, dont l'élément d'indice i est l'image de i par cette permutation. Par exemple, la liste `[3,1,0,2]` représente la permutation $\sigma \in S_4$ définie par

$$\sigma(0) = 3,\ \sigma(1) = 1,\ \sigma(2) = 0 \text{ et } \sigma(3) = 2$$

Dans tout l'exercice, on pourra utiliser librement les tests Python du type `x in L` (respectivement `x not in L`) permettant de vérifier si `x` est présent dans la liste `L` (respectivement de vérifier si `x` n'est pas présent dans la liste `L`).

1. Si s est une liste Python représentant une permutation de S_4, quelle instruction Python permet de trouver l'image de 1 par cette permutation ?
   Quelle liste Python représente la transposition $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$?
2. Écrire une fonction Python `comp(s1, s2)` prenant en entrée deux listes représentant des permutations σ_1 et σ_2 du même groupe de permutations et renvoyant la liste représentant la permutation $\sigma_1 \circ \sigma_2$.
3. Écrire une fonction Python `inv(s)` prenant en entrée une liste représentant une permutation σ et renvoyant la liste représentant σ^{-1}.
4. On souhaite tester si un sous-ensemble G de S_n est ou non un sous-groupe de S_n. Écrire une fonction Python `groupe(G)` prenant en entrée une liste de listes, où chaque sous-liste représente une permutation de S_n et renvoyant `True` s'il s'agit bien d'un sous-groupe de S_n, `False` sinon.
5. Écrire une fonction Python `cyclique(s)` prenant en entrée une liste `s` représentant une permutation σ de S_n et renvoyant le sous-groupe de S_n engendré par σ sous la forme d'une liste de listes.

Problème

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur à 1. On désigne par $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans cet ordre.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée.
On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle\ |\ \rangle$ et de la norme euclidienne $\|.\|$ associée.
On note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes autoadjoints de E, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes s de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \ \langle s(x)|y\rangle = \langle x|s(y)\rangle$$

Un endomorphisme autoadjoint s de E est *autoadjoint positif* si : $\forall x \in E, \langle s(x)|x\rangle \geqslant 0$.
Un endomorphisme autoadjoint s de E est *autoadjoint défini positif* si : $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\langle s(x)|x\rangle > 0$.

Questions préliminaires

1. Montrer que la fonction logarithme est concave sur $]0, +\infty[$. En déduire, pour tous réels positifs $a_1, \dots, a_n$,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

2. (a) Énoncer (sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes autoadjoints de l'espace euclidien E et sa version relative aux matrices symétriques réelles.
   (b) Toute matrice symétrique à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable ? On pourra par exemple considérer la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$S = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

3. Soit $s \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$$

Soit $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, ε_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i. Pour tout vecteur x de E, on pose :

$$R_s(x) = \langle s(x)|x\rangle$$

   (a) Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des λ_i et des coordonnées de x dans la base β.
   (b) En déduire l'inclusion : $R_s(S(0,1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$ où $S(0,1)$ désigne la sphère unité de E.

4. (a) On suppose dans cette question que s est autoadjoint positif (respectivement autoadjoint défini positif). Démontrer que les valeurs propres de s sont toutes positives (respectivement strictement positives).
   (b) Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$$

   On note s l'endomorphisme de E représenté par S dans la base canonique $B = (e_1, \dots, e_n)$. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de S comme un produit scalaire et démontrer que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \lambda_1 \leqslant s_{i,i} \leqslant \lambda_n$$

Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

5. Démontrer que l'application $M \mapsto M^\top M - I_n$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Justifier que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \ \ |a_{i,j}| \leqslant 1$$

7. En déduire que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
8. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = \mathrm{Tr}(AS)$.
   (a) Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :

$$T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$$

   (b) Démontrer que l'application T de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ que l'on notera t.

(c) Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leqslant \mathrm{Tr}(S)$, puis déterminer le réel t.

Inégalité d'Hadamard

Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (réelles positives) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$

9. Démontrer l'inégalité valable pour tout $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$:

$$\det(S) \leqslant \left(\frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(S)\right)^n \quad (*)$$

10. Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $S_\alpha = D^\top SD$. Démontrer que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\mathrm{Tr}(S_\alpha)$.
11. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $\alpha_i = \dfrac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité $(*)$, démontrer que :

$$\det(S) \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$$

12. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose $S_\varepsilon = S + \varepsilon I_n$. Démontrer que $\det(S_\varepsilon) \leqslant \prod_{i=1}^{n} (s_{i,i} + \varepsilon)$, puis conclure que :

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i} \quad \text{(inégalité d'Hadamard)}$$

Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, et $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = \Omega\Delta\Omega^\top$.
On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

13. Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{U}$, la matrice $B = \Omega^\top A\Omega$ est une matrice de $\mathcal{U}$ vérifiant :

$$\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$$

14. Démontrer que $\{\mathrm{Tr}(AS) \setminus A \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$, puis que ces ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m.
15. Démontrer que, si $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$:

$$\mathrm{Tr}(B\Delta) \geqslant n(\lambda_1 \ldots \lambda_n)^{1/n}(b_{1,1} \ldots b_{n,n})^{1/n}$$

16. En déduire que, pour $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$, $\mathrm{Tr}(B\Delta) \geqslant n(\det(S))^{1/n}$.
17. Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k}(\det(S))^{1/n}$ et $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

    Déterminer le réel m.
