

Devoir surveillé n° 4 – sujet C

MP

samedi 1^{er} février 2025



La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Dans tout l'exercice α désigne un réel strictement supérieur à 1.

1. Soit un entier n strictement positif.

- (a) Justifier l'existence de l'intégrale notée I_n égale à $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt$.
- (b) En effectuant le changement de variable $t = \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'intégrale I_n , montrer que l'application $u \mapsto \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et exprimer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n} du$ en fonction de l'intégrale I_n .
- (c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geq 0, \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \geq 1 + u.$$

2. Déterminer la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n$ pour $u \geq 0$.

3. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n} du.$$

- (a) Montrer, en justifiant avec soin, que la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers plus l'infini est égale à $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ où $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u} du$.
- (b) En déduire un équivalent de l'intégrale I_n lorsque n tend vers plus l'infini.
4. (a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} I_n x^n$ où I_n est la suite définie à la question 1).
- (b) Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que : $|x| < R$, on note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$. Montrer, en précisant avec soin le théorème utilisé, que :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha-x} dt \quad \text{pour } |x| < R.$$

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Questions de cours.
 - (a) Rappeler sans démonstration la loi de X , son espérance et sa variance.
 - (b) Écrire les développements en série entière des fonctions ch et sh en précisant les domaines de validité.
 - (c) Pour X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes sur Ω , rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».
2. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X et définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = 0 \text{ si } X(\omega) \text{ est pair et } Y(\omega) = 1 \text{ si } X(\omega) \text{ est impair}$$

- (a) Exprimer les événements $(Y = 0)$ et $(Y = 1)$ à l'aide d'événements $(X = j)$ où $j \in \mathbb{N}$.
 - (b) En déduire la loi de Y et son espérance. On exprimera les résultats à l'aide des fonctions $\exp$, ch et sh .
3. Soit Z une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X , indépendante de X et telle que :

$$Z(\Omega) = \{1, 2\} \text{ et } P(Z = 1) = P(Z = 2) = \frac{1}{2}$$

On pose $T = XZ$.

- (a) Préciser $T(\Omega)$.
 - (b) Donner la loi de T .
 - (c) Quelle est la probabilité que T prenne des valeurs paires ? On donnera le résultat à l'aide des fonctions $\exp$, ch et sh .

Exercice 3

1. Question préliminaire

En utilisant l'égalité $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\cos(n)}{n}.$$

On note R son rayon de convergence.

2. Montrer que $R \geq 1$.
3. Prouver que la série de terme général $\cos(n)$ diverge.
4. En déduire la valeur de R .

On note alors, pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n} x^n$.

5. Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière définie par : $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in} x^n$ où i désigne le nombre complexe usuel tel que $i^2 = -1$.

6. En déduire une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.
 7. Déterminer alors une expression de la somme de la série entière proposée à l'aide de fonctions usuelles.
 8. En déduire le rayon de convergence et la somme $g(x)$ de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2(\frac{n}{2})}{n} x^n$.
-

Exercice 4

Un fabricant de produits d'entretien pour machines à café fournit deux types de produits : un produit détartrant (produit A) et un produit dégraissant (produit B). Ce fabricant vend les produits conditionnés uniquement en boîtes contenant à la fois un produit A et un produit B. Cependant, pour rendre service à ses clients qui n'ont besoin que d'un seul produit, un commerçant accepte de vendre séparément les produits.

Pour la suite, on suppose que chaque client qui se présente chez le commerçant n'effectue qu'un seul achat. On suppose également que les choix (du produit A ou B) des clients sont indépendants. On fait également l'hypothèse qu'il ne reste aucune boîte entamée au début de la journée. On considère que chaque client qui se présente chez ce commerçant achète le produit A avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et le produit B avec la probabilité $1 - p$. On note X (respectivement Y) le nombre de produits A (respectivement de produits B) vendus au cours de la journée. On note $Z = \max(X, Y)$.

1. On considère une journée où 4 clients se sont présentés. Déterminer la loi de X , la loi de Y et les espérances de ces deux variables aléatoires. Déterminer la loi de Z . Que représente cette variable aléatoire ?

On suppose désormais que le nombre de personnes se présentant chez le commerçant durant une journée est une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre λ .

2. Soit n un entier naturel. Quelle est la loi de X sachant que l'événement $(N = n)$ est réalisé ?
3. Donner la loi conjointe du couple (X, N) .
4. En déduire la loi de X . Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.
5. Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
6. En utilisant la relation $N = X + Y$, calculer $\text{Cov}(X, N)$.
7. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$S(k, x) = \sum_{j=0}^k \frac{x^j}{j!}$$

Exprimer $P(Z \leq k)$ en fonction de λ , $S(k, \lambda p)$ et $S(k, \lambda(1 - p))$.

8. Le langage de programmation est Python.
 - (a) Définir la fonction `S(k, x)` qui calcule $S(k, x)$ à partir des valeurs de k et x données.
 - (b) On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$ et $\lambda = 10$. Le commerçant constate en début de journée qu'il lui reste exactement 5 boîtes, aucune n'étant entamée. Écrire les instructions permettant d'afficher la probabilité que le commerçant tombe en rupture de stock au cours de la journée.
-

Exercice 5

Soit n un entier naturel non nul. Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

$$N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ donnée par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

On considère $\|\cdot\|$, la norme, appelée norme triple, définie par $\|A\| = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty$.

2. Montrer que $\|A\| = N(A)$.
 3. Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $\|A\|$.
-