Devoir surveillé n° 4 – sujet B
MP
samedi 1er février 2025

Lycée Camille PISSARRO

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Nombre de sites visités par une marche aléatoire

Dans tout le texte, d est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note 0_d le d-uplet dont toutes les coordonnées valent 0, c'est à dire le vecteur nul de $\mathbb{R}^d$.

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de X et définies sur un même espace probabilisé. La suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $S_0 = 0_d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *marche aléatoire de pas* X, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$.

On note R la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par

$$R = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0_d\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0_d\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, R est égal à $+\infty$ si la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne revient jamais en 0_d, au premier instant auquel cette marche aléatoire revient en 0_d sinon.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit N_n le cardinal du sous-ensemble

$$\{S_k,\ k \in \{0,\dots,n\}\}$$

de $\mathbb{Z}^d$. Le nombre N_n est donc le nombre de points de $\mathbb{Z}^d$ visités par la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ après n pas.

Le but du problème est d'étudier asymptotiquement l'espérance $\mathrm{E}(N_n)$ de la variable aléatoire N_n. La partie D est indépendante des parties précédentes.

A. Préliminaires

Les cinq questions de cette partie sont indépendantes et utilisées dans les parties C et E.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la factorisation

$$(X+1)^{2n} = (X+1)^n(X+1)^n$$

montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

2. Rappeler la formule de Stirling, puis déterminer un nombre réel $c > 0$ tel que

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} c\frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

3. Si $\alpha \in]0,1[$, montrer, par exemple en utilisant une comparaison série-intégrale, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Si $\alpha > 1$, montrer de même que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

4. Pour $x \in [2,+\infty[$, on pose

$$I(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$$

Justifier, pour $x \in [2,+\infty[$, la relation

$$I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2}$$

Établir par ailleurs la relation

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} \underset{x\to+\infty}{=} o(I(x))$$

En déduire finalement un équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler sans donner de démonstration, le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ sur $]-1,1[$.
Justifier la formule :

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$$

B. Marches aléatoires, récurrence

On considère les fonctions F et G définies par les formules

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n = 0_d)x^n$$

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(R = n)x^n$$

6. Montrer que les séries entières définissant F et G ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Justifier alors que les fonctions F et G sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
Montrer que G est définie et continue sur $[-1,1]$ et que

$$G(1) = \mathrm{P}(R \neq +\infty)$$

7. Si k et n sont des entiers naturels tels que $k \leqslant n$, montrer que
$$\mathrm{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \mathrm{P}(R = k)\mathrm{P}(S_{n-k} = 0_d)$$
En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(R = k)\mathrm{P}(S_{n-k} = 0_d)$$
8. Montrer que
$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ F(x) = 1 + F(x)G(x)$$
Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x \to 1^-$, en discutant selon la valeur de $\mathrm{P}(R \neq +\infty)$.
9. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que la série entière $\sum c_k x^k$ ait un rayon de convergence 1 et que la série $\sum c_k$ diverge. Montrer que
$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = +\infty$$
L'élément A de $\mathbb{R}^{+*}$ étant fixé, on montrera qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que
$$\forall x \in]1-\alpha, 1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k > A$$
10. Montrer que la série $\sum \mathrm{P}(S_n = 0_d)$ est divergente si et seulement si $\mathrm{P}(R \neq +\infty) = 1$.
11. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit Y_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement
$$(S_i \notin \{S_k,\ 0 \leqslant k \leqslant i-1\})$$
Montrer que, pour $i \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathrm{P}(Y_i = 1) = \mathrm{P}(R > i)$$
En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathrm{E}(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(R > i)$$
12. Conclure que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{E}(N_n)}{n} = \mathrm{P}(R = +\infty)$$
On pourra utiliser le théorème de Cesàro.

C. Les marches de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$

Dans cette question, d est égal à 1 et on note donc simplement $0_d = 0$.
Par ailleurs, $p \in]0, 1[\,$, $q = 1 - p$ et la loi de X est donnée par
$$\mathrm{P}(X = 1) = p \ \text{ et } \ \mathrm{P}(X = -1) = q$$

13. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathrm{P}(S_{2n+1} = 0)$ et justifier l'égalité
$$\mathrm{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}(pq)^n$$
14. Pour $x \in]-1, 1[\,$, donner une expression simple de $G(x)$.
Exprimer $\mathrm{P}(R = +\infty)$ en fonction de $|p - q|$.
Déterminer la loi de R.
15. On suppose que
$$p = q = \frac{1}{2}$$
Donner un équivalent simple de $\mathrm{P}(R = 2n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent simple de $\mathrm{E}(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

D. Un résultat asymptotique

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 1$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

16. Soient m et n deux entiers naturels tels que $m > n$. Montrer que

$$a_n \leqslant \frac{1}{B_n} \quad \text{et} \quad 1 \leqslant a_n B_{m-n} + a_0(B_m - B_{m-n})$$

17. On suppose dans cette question qu'il existe $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $m_n > n$ pour n assez grand et

$$B_{m_n-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n \quad \text{et} \quad B_{m_n} - B_{m_n-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Montrer que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{B_n}$$

18. On suppose dans cette question qu'il existe $C > 0$ tel que

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n}$$

En utilisant la question 17 pour une suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bien choisie, montrer que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{C\ln(n)}$$

E. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$: un théorème d'Erdös et Dvorestsky

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(S_k = 0_d)\mathrm{P}(R > n-k)$$

Cette question ne resservira pas puisque j'ai enlevé la dernière question.

Dans les questions 20 et 21, on suppose que $d = 2$ et que la loi de X est donnée par

$$\mathrm{P}(X = (0,1)) = \mathrm{P}(X = (0,-1)) = \mathrm{P}(X = (1,0)) = \mathrm{P}(X = (-1,0)) = \frac{1}{4}$$

20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir l'égalité

$$\mathrm{P}(S_{2n} = 0_2) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2$$

21. *Question enlevée.*
