Devoir surveillé n° 4 – sujet A
MP
samedi 13 janvier 2024

Lycée Camille PISSARRO

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On utilisera dans cet exercice, sans démonstration, la relation :

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

1. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe du couple (X,Y) vérifie :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathrm{P}(X=i, Y=j) = \mathrm{P}[(X=i)\cap(Y=j)] = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

   (a) Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.
   (b) Démontrer que les variables X et Y suivent une même loi que l'on déterminera.
   (c) Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 2

Dans cet exercice d'informatique commune, on se propose d'écrire des algorithmes dans le but de faire du calcul matriciel et plus particulièrement afin d'utiliser les matrices d'adjacence d'un graphe. Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage **Python**. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code. L'usage de toute librairie est **interdit**.

Les matrices sont carrées et représentées par des listes dont les éléments correspondent aux lignes de la matrice. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est représentée par la liste `[[1,2],[3,4]]`. Dans la suite, pour définir la matrice d'adjacence $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'un graphe ayant n sommets, on numérote ses sommets de 0 à $n-1$.

1. Écrire une fonction `produit(A,B)` prenant en arguments deux matrices carrées A et B de mêmes dimensions et qui renvoie AB le produit de la matrice A par la matrice B.
2. Écrire une fonction `oriente(A)` prenant en argument la matrice d'adjacence A d'un graphe et qui retourne `True` si le graphe est orienté et `False` sinon.
3. On admet que le nombre de chemins de longueur p reliant i et j dans un graphe de matrice d'adjacence A est égal au coefficient d'indice (i,j) de la matrice A^p. Écrire une fonction `distance(A,i,j)` où A est la matrice d'adjacence d'un graphe et qui renvoie le nombre minimal d'arêtes que l'on doit parcourir pour atteindre le sommet j depuis le sommet i (on suppose qu'un tel chemin existe).

On considère deux tables : `clients` et `partenaires`. La première contient des informations sur les clients et la deuxième permet d'identifier qui sont les partenaires des clients.
La table `clients` contient les attributs suivants :

— id : identifiant d'un individu (entier), clé primaire ;

— nom (chaîne de caractères) ;

— ville (chaîne de caractères) ;

— email (chaîne de caractères).

La table `partenaires` contient les attributs suivants :

— id : identifiant de suivi (entier), clé primaire ;

— id_client : identifiant du client représenté par l'attribut **id** dans la table `clients` (entier) ;

— partenaire : nom du partenaire (chaîne de caractères).

4. Écrire une requête SQL permettant d'extraire les identifiants de tous les clients provenant de la ville de : "Toulouse ".
5. Écrire une requête SQL permettant d'extraire les emails de tous les clients ayant "SCEI" comme partenaire.

Exercice 3

Les deux parties sont indépendantes.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne la matrice identité de taille (n, n) par I_n.
On note $\vec{u} = (1, \ldots, 1)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1 et F l'ensemble des vecteurs $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Partie 1

1. Quelle est la dimension de F ?

On considère A_n la matrice de taille (n, n) définie par : $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice a des 0 comme coefficients diagonaux et des 1 partout ailleurs.

2. Montrer sans calcul que A_n est diagonalisable.
3. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est dans F. Calculer $A_n X$ en fonction de X.
4. Déterminer un polynôme annulateur de A_n, puis les valeurs propres de A_n et, pour chacune de ses valeurs propres, le sous-espace propre associé.
5. Calculer le déterminant de la matrice A_n.

Partie 2

Soit M une matrice diagonalisable de taille (n, n). On lui associe U_M, la matrice de taille $(2n, 2n)$ définie par

$$U_M = \begin{pmatrix} M & I_n \\ I_n & M \end{pmatrix}$$

On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ les valeurs propres distinctes de M.

6. (a) Soit X un vecteur propre de M. Calculer $U_M \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$ et $U_M \begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer les valeurs propres de U_M en fonction de $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ et montrer que la matrice U_M est diagonalisable.

Problème

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.
Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période 2π.
Dans ce qui suit, on appelle *série trigonométrique* une série de fonctions du type

$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.

Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in C_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x$$

Partie 1 : exemples

1. Démontrer que la série trigonométrique $\sum \left(\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout entier $p \geqslant 2$, déterminer la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \left(\frac{e^{\mathrm{i}x}}{p} \right)^n$ puis en déduire la valeur de

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right)$$

   (il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).
2. Écrire la fonction $\varphi \ :\ x \mapsto \exp(\cos(x)) \cos(\sin(x))$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{\mathrm{i}x})$ comme somme de série de fonctions.
3. Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum a_n \cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que la série trigonométrique $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

5. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques. Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a \cos(x) + b \sin(x)|$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$.
7. Démontrer que si la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

8. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n \cos(nx)+b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. Justifier que $f \in C_{2\pi}$.
9. Calculer $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$ pour k et n entiers.
10. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n \cos(nx)+b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$.
    Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0. On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$.
    On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).
11. Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout réel x, on pose $u_0(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2}$.
    Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n(x) = \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)$. On suppose ici que la série trigonométrique $\sum(u_n(x))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée g :
    $$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k(f)\cos(kx) + \beta_k(f)\sin(kx))$$
    Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?
12. Il est admis que si une fonction $h \in C_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n, $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$ d'une fonction $f \in C_{2\pi}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x, on a

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$$

13. Si $f \in C_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.
14. Exemple. Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$. Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.
15. En déduire les sommes
    $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$
    Déduire alors de la seconde somme la valeur de
    $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$
16. *Question pour les 5/2 uniquement.* Application. Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$ puis démontrer que $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.
17. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$?
    Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum n a_n$ et $\sum n b_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\sum(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
18. Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum \frac{n}{3^n}\cos(nx)$.
