Devoir surveillé n° 4
MP
samedi 1er février 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Dans tout l'exercice α désigne un réel strictement supérieur à 1.

1. Soit un entier n strictement positif.
   (a) Justifier l'existence de l'intégrale notée I_n égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\,\mathrm{d}t$.
   (b) En effectuant le changement de variable $t = \left(\dfrac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'intégrale I_n, montrer que l'application $u \longmapsto \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\,\mathrm{d}u$ en fonction de l'intégrale I_n.
   (c) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geqslant 0, \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u.$$
2. Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{u}{n}\right)^n$ pour $u \geqslant 0$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la suite (v_n) par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\,\mathrm{d}u.$$
   (a) Montrer, en justifiant avec soin, que la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers plus l'infini est égale à $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ où $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u$.
   (b) En déduire un équivalent de l'intégrale I_n lorsque n tend vers plus l'infini.
4. (a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$ où I_n est la suite définie à la question 1).
   (b) Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que : $|x| < R$, on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$. Montrer, en précisant avec soin le théorème utilisé, que :
   $$S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha - x}\,\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad |x| < R.$$

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Questions de cours.
   (a) Rappeler sans démonstration la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Écrire les développements en série entière des fonctions ch et sh en précisant les domaines de validité.
   (c) Pour X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes sur Ω, rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».
2. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X et définie par :
$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = 0 \text{ si } X(\omega) \text{ est pair et } \quad Y(\omega) = 1 \text{ si } X(\omega) \text{ est impair}$$
   (a) Exprimer les événements $(Y = 0)$ et $(Y = 1)$ à l'aide d'évéments $(X = j)$ où $j \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire la loi de Y et son espérance. On exprimera les résultats à l'aide des fonctions exp, ch et sh.
3. Soit Z une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X, indépendante de X et telle que :
$$Z(\Omega) = \{1, 2\} \text{ et } \mathrm{P}(Z = 1) = \mathrm{P}(Z = 2) = \frac{1}{2}$$
   On pose $T = XZ$.
   (a) Préciser $T(\Omega)$.
   (b) Donner la loi de T.
   (c) Quelle est la probabilité que T prenne des valeurs paires ? On donnera le résultat à l'aide des fonctions exp, ch et sh.

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients réels.
Dans tout l'exercice, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite diagonalisable si elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On rappelle que l'espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et que l'espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Partie 1

On prend dans cette partie $n = 2$.

1. Exhiber un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constitué de matrices diagonalisables.
2. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.
3. $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier.

4. Déterminer alors tous les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.
5. Soient $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (a-d)^2 + 4bc > 0 \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (a-d)^2 + 4bc \geqslant 0 \right\}$.
   (a) Montrer que Ω est un ouvert de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et F un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que l'on a : $\Omega \subset \mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \subset F$.
   (c) $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? un ouvert de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier.

Partie 2

On revient au cas général avec $n > 2$.

6. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$ définies par :

   $a_{1,1} = a_{1,2} = 1$, $a_{2,2} = -1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon,
   $b_{1,1} = -1$, $b_{1,2} = b_{2,2} = 1$ et $b_{i,j} = 0$ sinon.

   (a) Vérifier que A et B sont diagonalisables.
   (b) $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Justifier.
7. Soit $N \in \mathcal{A}_n$. Démontrer que l'ensemble des valeurs propres réelles de N est inclus dans $\{0\}$.
   On pourra calculer le produit matriciel $X^\top NX$ pour un vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
8. Soit S un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $S \cap \mathcal{A}_n$.
   En déduire la dimension maximale d'un tel sous-espace vectoriel S. On donnera un exemple d'un sous-espace réalisant cette condition.
9. On note $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la ligne i et colonne j qui vaut 1.
   (a) Donner sans démonstration une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ où $i < j$, on pose $T_{i,j} = 4E_{j,i} + E_{i,j}$.
   Soit P la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $(1,\dots,1,2,1,\dots,1)$ où le 2 est à la j-ème position.
   Calculer la matrice $P^{-1}T_{i,j}P$. Justifier alors que la matrice $T_{i,j}$ est diagonalisable.
   (c) Soit $\mathcal{T} = \mathrm{Vect}(T_{i,j}, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i < j)$. Prouver que $\mathcal{M}_n = \mathcal{T} \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   En déduire une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices toutes diagonalisables.
   (d) Déterminer enfin tous les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

1. On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.
   En remarquant que, pour $k \geqslant 1, b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$ (transformation d'Abel).
2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum_{k \geqslant 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.
   (b) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n b_n$ converge.
   (c) En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.
3. Exemple.
   Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$.
   (b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.
4. Soit la série de fonction $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
   Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.
   On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si, et seulement si, les deux séries ayant pour termes généraux les parties réelles et parties imaginaires convergent.
   On notera U sa fonction somme : pour tout réel x, $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

5. On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
   On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n, $F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$.
   On suppose que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(z)| \leqslant M$ (on dira que la suite (F_n) est uniformément bornée).
   (a) Démontrer que la suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions $\sum_{k \geqslant 0} (a_k - a_{k+1}) F_k$ converge normalement sur A.
   (b) À l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A.
6. Exemple.
   Pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

(a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{\mathrm{i}x} = -2\mathrm{i}\sin(\frac{x}{2})e^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}$.
Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$ où $a \in]0, \pi[$.
En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

(b) Pour p entier naturel, on considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $v_n(x) = \dfrac{\sin(nx)\sin(px)}{\sqrt{n}}$.
Démontrer que, pour tout entier naturel p, la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, \pi[$. On pourra, par exemple, utiliser sans démonstration, que :

$$\text{pour tout } x \in [0, \pi],\ \frac{x}{\pi} \leqslant \sin(\frac{x}{2}).$$

Troisième partie : convergence uniforme d'une série entière

7. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon $R > 0$, rappeler le résultat du cours concernant la convergence uniforme de cette série.

8. On considère la série de la variable complexe $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ de rayon 1.

(a) On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.
Démontrer que la série de la variable réelle $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$ (en particulier la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur D).

(b) On pourra confondre un point de $\mathbb{R}^2$ et son affixe. Pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note D_α l'ensemble des complexes z, tels que $|z| \leqslant 1$ et dont la partie réelle vérifie $\mathcal{R}e(z) \leqslant \cos\alpha$.
Représenter géométriquement l'ensemble D_α dans un repère orthonormé du plan.

(c) Démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{C}$. On pourra écrire :

$$D_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant \cos\alpha\}$$

En déduire que D_α est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

(d) On note pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier naturel, $F_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} z^k$.
Démontrer que pour tout $z \in D_\alpha$ et tout entier naturel n, si $x = \mathcal{R}e(z)$:

$$|F_n(z)| \leqslant \frac{2}{1 - x} \leqslant \frac{2}{1 - \cos\alpha}$$

(e) Démontrer que la série entière $\sum \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tous les compacts D_α (pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).
