Devoir surveillé n° 3 – sujet B
MP
samedi 14 décembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Notations

Dans ce problème, on introduit la notion de produit infini et on l'utilise pour obtenir diverses propriétés.

— La partie I permet d'obtenir des résultats qui seront utilisés dans tout le problème.

— La partie II étudie quelques exemples de calcul de produit infini, dont celui de Wallis, et donne par ailleurs une illustration en probabilités.

— La partie III permet de montrer, sous certaines conditions, la continuité ou le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une fonction définie par un produit infini de fonctions.

— La partie IV a pour but d'exprimer la fonction sinus sous forme de produit infini et, en s'appuyant sur la partie III, d'en tirer quelques conséquences.

— Enfin, la partie V étudie la fonction Γ. Elle utilise quelques résultats des parties I, III et IV.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de t.
Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$,

$$P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k$$

On dit que la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod\limits_{n \geqslant p} u_n$.

Si la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} P_n$$

I Résultats préliminaires

I.A – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|) \right) - 1$$

2. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in [-1, +\infty[^n$,

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)$$

I.B – Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Le but de cette sous-partie est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^z.

3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,
$$|(1+t) - \mathrm{e}^t| \leqslant |t|^2 \mathrm{e}^{|t|}$$
4. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.
Montrer que $|a^n - b^n| \leqslant nM^{n-1}|a-b|$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leqslant \dfrac{|z|^2}{n}\mathrm{e}^{|z|}$.
6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e^z.

II Exemples de calcul de produit infini

II.A –

7. Calculer $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.
On pourra, pour tout $N \geqslant 2$, établir une expression de $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ *et* $\displaystyle\prod_{n=2}^{2N}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

II.B – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n \,\mathrm{d}u$$

8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$
9. Déterminer un équivalent de la suite $(W_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{4n^2-1}\right)$.

II.C – On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants tels que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{P}(A_n)$ diverge.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\prod_{p=n}^{+\infty}(1 - \mathrm{P}(A_p)) = 0$.
On pourra utiliser l'inégalité démontrée en question 2.
11. En déduire que $\mathrm{P}\left(\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = 1$.

III Étude d'une fonction définie par un produit infini

On considère dans cette partie :

— a et b deux réels tels que $a < b$ et le segment $\mathcal{S} = [a,b]$.

— $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $]-1, +\infty[$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+f_k(x)), \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(x)|), \quad \text{et sous conditions d'existence } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}|f_k(x)|$$

III.A – On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathcal{S}$ et que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} |f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction R_0.

12. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leqslant \mathrm{e}^M |f_{n+1}(x)|$$

13. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leqslant Q_{n+1}(x) - Q_n(x)$$

14. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction P définie sur $\mathcal{S}$ par :

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 + f_n(x)) \end{cases}$$

15. Montrer que la fonction P est continue et ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.

III.B – Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $f(x) = \prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - e^{-nx^2}\right)$.

16. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.
17. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^\star$ puis calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. *Pour la limite en $+\infty$, on pourra utiliser les questions 1 et 2.*

III.C – On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ telle que :

— la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} |f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

— la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{f_n'}{1+f_n}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

18. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$,

$$P_n'(x) = P_n(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{1 + f_k(x)}$$

19. En déduire que la fonction

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 + f_n(x)) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ et que

$$\forall x \in \mathcal{S},\ \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)}$$

IV Expression de la fonction sinus comme produit infini

IV.A – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left(\left(1 + \frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)$$

Dans les questions Q20 à Q23, on fixe un entier naturel n.

20. Montrer que P_n est un polynôme de degré $2n + 1$.

21. Pour tout $\in [\![0,2n]\!]$, on note $x_k = (2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$. Montrer que l'ensemble des racines de P_n est $\{x_k \,|\, k \in [\![0,2n]\!]\}$.
22. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$P_n(X) = \lambda X \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right)$$

23. En calculant $P_n'(0)$, montrer que :

$$P_n(X) = X \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right)$$

24. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction sinus.

IV.B – Dans cette sous-partie, on fixe un réel x et on considère la suite de fonctions $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ v_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} x \prod\limits_{j=1}^{k}\left(1 - \dfrac{x^2}{\left(\tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor+1}\right)(2\lfloor t\rfloor+1)\right)^2}\right) & \text{si } t \geqslant k \\ P_{\lfloor t\rfloor}(x) & \text{si } t < k. \end{cases} \end{cases}$$

25. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$,

$$|v_k(t) - v_{k-1}(t)| \leqslant \frac{x^2}{k^2\pi^2}|v_{k-1}(t)|$$

26. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|v_k(t)| \leqslant |x| \exp\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)$$

27. En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 2}(v_k - v_{k-1})$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
28. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{t\to+\infty} v_k(t)$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{k\to+\infty} v_k(t)$.
29. En déduire que :

$$\sin(x) = x \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)$$

IV.C –

30. Montrer que, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$,

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2x}{(j\pi)^2 - x^2}$$

31. En déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

    On pourra dans un premier temps déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2\sin(x)}$.

V Autour de la fonction Γ

V.A – Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$$

32. Montrer que Γ est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.
    Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose

$$g_n(x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \, \mathrm{d}u$$

33. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$g_n(x) = \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)}$$

34. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \Gamma(x)$$

35. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^x n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)}$.

V.B –

36. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

V.C –

37. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$

38. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$\Gamma(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{n}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}$$
