Devoir surveillé n° 3
MP
samedi 14 décembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) & = (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) & = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   (b) Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et les déterminer.
4. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et déterminer sa différentielle.
5. Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [1,+\infty[$, la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur J.

On note alors pour tout x de J, $\varphi(x)$ sa somme.

2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J.
3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J.
4. Déterminer $\ell = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

   (a) Justifier la convergence de la série de terme général u_n. On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

(b) Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Exercice 3

Pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on pose :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right)$$

où $\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

1. Montrer que, pour tout x réel, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Déterminer l'ensemble J des réels x pour lesquels la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On pourra utiliser la suite $(\ln(P_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Soit $x \in J$. On note $\varphi(x)$ la limite de la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (a) Étudier la parité et la monotonie de la fonction φ sur J.
   (b) Démontrer que la fonction φ est continue sur J.
4. (a) Prouver que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\operatorname{ch}}$.
   On pourra utiliser un changement de variable.
   (b) En déduire l'intégrabilité de la fonction $\dfrac{1}{\varphi}$.

Exercice 4

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$.
Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \longmapsto x^n e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n!$.

1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant, pour tout couple (P, Q) de polynômes de E, $< P, Q > = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$. On notera $\|\ \ \|$ la norme euclidienne associée.
2. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ noté $P_F(X^2)$.
3. Justifier que $\| X^2 - P_F(X^2) \|^2 = \| X^2 \|^2 - \| P_F(X^2) \|^2$ puis calculer le réel :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 5

Dans cet exercice, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 \,\mathrm{d}x$ est convergente.

1. Montrer que, si f et g sont deux éléments de E_α, l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) \,\mathrm{d}x$ est convergente.
2. En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
3. Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ est élément de E_α.

Pour tout entier naturel n, on définit les fonctions :

$$\varphi_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^{n+\alpha} e^{-x}$$

et

$$\psi_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^{-\alpha} e^{x} \varphi_n^{(n)}(x)$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

4. Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0, +\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élement de E_α, ce qu'on fera désormais.

Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2$, on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) \,\mathrm{d}x$$

6. Montrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur E_α.

Dans la suite, on note $\|.\|_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par

$$\|f\|_\alpha = \left(\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2} \qquad \text{pour tout } f \in E_\alpha.$$

7. Soit n un entier $\geqslant 1$. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, établir que

$$\varphi_n^{(k)}(x) \to 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } 0 \text{ par valeurs strictement positives,}$$

et que

$$\varphi_n^{(k)}(x) = o(e^{-x/2}) \text{ quand } x \to +\infty.$$

8. Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int\limits_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) \,\mathrm{d}x.$$

En déduire que la famille $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$.