Devoir surveillé n° 3
MP
samedi 26 novembre 2023

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Questions proches du cours

Question proche du cours n°1

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.

Question proche du cours n°2

Pour a réel, on considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Sans calcul, justifier que A_1 est diagonalisable.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $A_a U_1$ et en déduire que 2 est valeur propre de A_a.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le polynôme caractéristique de A_a.
4. Recopier et compléter le tableau suivant :

Cas	Valeurs propres réelles de A_a et ordres de multiplicité
$a < 0$	
$a = 0$	
$a > 0$ et $a \neq 4$	
$a = 4$	

5. Justifier que si $a > 0$ et $a \neq 4$, alors A_a est diagonalisable.
6. La matrice A_0 est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
7. Montrer que A_4 est diagonalisable et la diagonaliser. On demande P et D telles que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1} (les calculs doivent figurer sur la copie).

Exercice 1 – séries, familles sommables

Les questions 2., 3., 4. et 5. sont indépendantes.

1. Énoncer le théorème du produit de Cauchy. Appliquer ce théorème à deux séries géométriques de même raison $x \in]-1,1[$. En déduire la convergence de la série $\sum kx^{k-1}$ et la somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2. Soit $x \in]-1,1[$.
   (a) Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}$.
   (b) Montrer que la série $\sum_{p\geqslant 1} \frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge et que sa somme est égale à celle de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$.

3. On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
   (a) Montrer que l'on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}$.
   (b) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

4. On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ donnée par $b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ -1 & \text{si } i = j \\ \frac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i < j \end{cases}$
   (a) Montrer l'existence de $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.
   (b) Montrer l'existence de $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.
   (c) Qu'en déduit-on ?

5. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable mais que la famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ n'est pas sommable (on pourra vérifier pour commencer que $p^2+q^2 \leqslant (p+q)^2$).

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Généralités sur φ.
   (a) Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ.

3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$$

   (a) Justifier que l'application ψ est linéaire.
   (b) Démontrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, \ldots, X^{n+1})$.
   (c) Démontrer que : $P \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \ldots, X^n(X-1))$.
   (d) Donner alors une base de $\ker(\varphi)$.

4. On note $\mathcal{H} = \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.
   (a) Donner la dimension de $\mathcal{H}$.
   (b) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
   Démontrer que la famille $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.
   (c) Déterminer les composantes de φ dans cette base.

Problème

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On s'intéresse ici à la convergence des suites matricielles $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_k \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ avec $p = 1$ (matrices colonnes) ou $p = n$ (matrices carrées). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $M_k = \left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ ou plus simplement $M_k = \left(m_{i,j}^{(k)}\right)$.

On suppose que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est muni d'une norme, et on se permet de noter cette norme $\|.\|$ indifféremment des valeurs de n et p. En particulier, si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, V est une matrice colonne assimilée à un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et on note $\|V\|$ sa norme.

On rappelle que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$;
- la suite des normes $(\|M_k - A\|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ;
- pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, la suite de nombres complexes $\left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ (convergence des coefficients de la matrice).

On s'intéresse en particulier à la suite des puissances itérées $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ d'une matrice donnée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie I - Limite des puissances d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ muni d'une norme notée $\|.\|$. On note sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad |\lambda| < 1$$

où $\mathrm{Sp}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u. On note A la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathscr{B}$.
L'objectif de cette partie est de montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.
On suppose, sauf à la dernière question de cette partie, que $A = T$ où T est une matrice triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \|u^k(e_1)\| = 0$ et en déduire $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_1)$.

On suppose qu'il existe $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_j) = 0$.

2. Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{Vect}(e_j)_{j\in[\![1,i]\!]}$ tel que :

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x.$$

En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).$$

3. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\| \sum\limits_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0$. En déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_{i+1}) = 0$.
4. Montrer alors que $\lim\limits_{k\to+\infty} T^k = 0$.
5. On ne suppose plus que A est triangulaire supérieure. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.

Partie II - Application à la méthode de Gauss-Seidel

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

On dit alors que A est une matrice à **diagonale strictement dominante**. On admet provisoirement qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible (la démonstration sera l'objet de la troisième partie). La matrice A est donc inversible.
On définit ensuite $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la manière suivante : pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

- si $i \geqslant j$, $m_{i,j} = a_{i,j}$ et $f_{i,j} = 0$
- si $i < j$, $m_{i,j} = 0$ et $f_{i,j} = -a_{i,j}$.

Ainsi, $A = M - F$ où F est la partie triangulaire supérieure de diagonale nulle de $-A$ et où M est la partie triangulaire inférieure de A.

Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On note $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'unique matrice colonne telle que :

$$AX = Y.$$

Le but de cette partie est de trouver une suite qui converge vers X.

6. Justifier que M est inversible.

Dans la suite de cette partie, on pose $B = M^{-1}F$. On définit par récurrence une suite de matrices colonnes $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ quelconque et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = BX_k + M^{-1}Y.$$

7. Montrer que $X = BX + M^{-1}Y$.

Soit λ une valeur propre quelconque de la matrice B. On note $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de B associé à cette valeur propre.

Par convention, si $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes alors $\sum\limits_{j=n+1}^{n} u_j = \sum\limits_{j=1}^{0} u_j = 0$.

8. Montrer que $FV = \lambda MV$. En déduire que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \lambda a_{i,i} v_i = -\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} v_j \right).$$

9. Montrer qu'il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|v_{i_0}| = \max\limits_{j \in [\![1,n]\!]} |v_j|$ et $v_{i_0} \neq 0$. En déduire que :

$$|\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}| \right).$$

10. En déduire que $|\lambda| < 1$, puis que $\lim\limits_{k \to +\infty} B^k = 0$.
11. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k - X = B^k (X_0 - X)$$

et conclure.

Partie III - Inversibilité d'une matrice à diagonale strictement dominante

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire que A vérifie la condition :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \ |a_{i,i}| > \sum_{j \in [\![1,n]\!],\, j \neq i} |a_{i,j}|$$

12. On suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$ tel que $X \neq 0, \ AX = 0$ et $(\forall i \in [\![1,n]\!], \ |x_1| \geqslant |x_i|)$.

    Aboutir à une contradiction en utilisant la première ligne du système $AX = 0$.
13. On suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$ tel que $X \neq 0$ et $AX = 0$. Aboutir à une contradiction.
14. En déduire que A est inversible.