Devoir surveillé n^{o} 2 – sujet B
MP
samedi 11 octobre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice : informatique

On considère un groupe de n personnes, numérotées de 0 à $n-1$. Chaque personne peut connaître une ou plusieurs personnes du groupe, et on écrit $i \to j$ lorsque la personne i connaît la personne j. Les règles de la relation de connaissance sont :

- on ne compte pas le fait que chacun se connaît (on n'a donc pas $i \to i$) ;
- la relation n'est pas symétrique : il se peut que i connaisse j, mais que j ne connaisse pas i.

Une vedette est une personne égocentrique (elle ne connaît personne d'autre) et célèbre (tous les autres la connaissent).

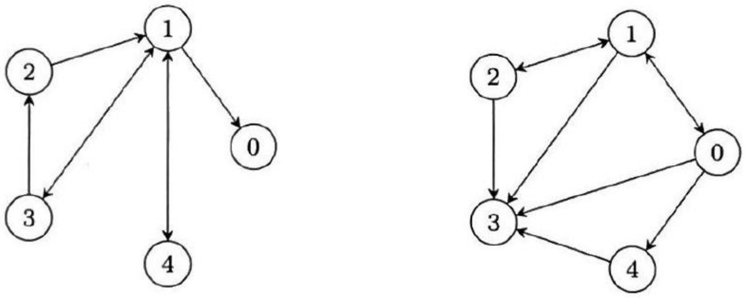

FIGURE 1 – À gauche : un groupe sans vedette. –À droite : 3 est une vedette.

On cherche à déterminer un algorithme qui permette

- de trouver une vedette, s'il en existe une,
- ou de garantir que le groupe ne comporte aucune vedette.

1. Quel est le nombre maximal de vedettes qu'un groupe peut posséder ?

Dans les deux questions suivantes, on stocke en mémoire la relation de connaisance sous forme de « listes des connaissances ». Pour chaque individu i, la liste des connaissances de i est la liste `L[i]` des personnes que i connaît.

Par exemple, si la liste `L [6]` vaut `L[6]=[4,5,12]`, cela signifie que

$$6 \to 4 \quad 6 \to 5 \quad \text{et} \quad 6 \to 12$$

On note `L=[L[0], L[2], ..., L[n-1]]` la liste des listes de connaissances.

2. Écrire une fonction `CombienConnaissent (L, i)` qui renvoie le nombre de personnes connaissant i.
   Proposer une majoration du nombre d'opérations en fonction de n.

On définit la matrice d'adjacence comme la matrice `M` (qui en Python est une liste de listes) dont les coefficients sont

$$\mathrm{M}[i][j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i \to j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, dans le groupe de gauche de la figure 1 , la matrice d'adjacence est

```
M = [[0, 0, 0, 0, 0] #0 ne connaît personne
    [1, 0, 0, 1, 1] # 1 connait 0, 3 et 4
    [0, 1, 0, 0, 0] #2 connaît 1
    [0, 1, 1, 0, 0] #3 connaît 1 et 2
    [0, 1, 0, 0, 0]] #4 connaît 1
```

3. Écrire une fonction `ListeVersMatrice(L)` prenant en argument la liste des listes de voisins, et renvoyant la matrice d'adjacence `M`.
4. Désormais, on suppose que la relation de connaissance est stockée dans la matrice `M`.
   Écrire une fonction `CombienConnaissent2(M, i)` qui renvoie le nombre de personnes connaissant i.
   Proposer une majoration du nombre d'opérations nécessaires en fonction de n.
5. Proposer une fonction `Debusquer_Vedette(M)` qui renvoie `False` s'il n'y a pas de vedette, ou bien le numéro de la vedette s'il en existe une.
   On impose que le nombre d'opérations effectuées soit un $\mathrm{O}\left(n^2\right)$, c'est-à-dire majoré par $\mathrm{C}^{\text{te}} \cdot n^2$.

6. On suppose dans cette question que le groupe de personnes étudié admet une vedette.
   On exécute le code suivant, dans lequel la matrice M est la matrice d'adjacence du groupe.

```
1 n = len(M)
2 i, j = 0, 1
3 while j < n:
4     if M[i][j] == 1:
5         i = j
6     j += 1
```

   On remarquera que le connaissance d'un élément $\mathrm{M}[i][j]$ (avec $i \neq j$) permet toujours de conclure qu'un individu n'est pas une vedette :

   — si $i \to j$, alors i n'est pas une vedette ;
   — au contraire, si $i \nrightarrow j$, alors j n'est pas une vedette.

   Montrer que la propriété $I(j)$: « pour tout $k < j$ tel que $k \neq i$, la personne d'indice k n'est pas une vedette »
   est vraie à la fin de la ligne 6 du code précédent (invariant de boucle).
   En déduire que la vedette est la personne d'indice i.

7. En déduire une fonction `Debusquer_Vedette2(M)` résolvant le problème en un nombre d'opérations majoré par $\mathrm{C}^{\text{te}} \cdot n$.

Problème

L'objectif de ce problème est d'étudier une famille de séries particulières. Quelques premiers résultats sont établis dans les préliminaires. La partie 1 propose d'établir une expression des séries congruo-harmoniques alternées sous la forme d'une intégrale. La partie 2 propose de calculer la valeur de la somme de la série dans certains cas particuliers. La partie 3 s'intéresse à des calculs de probabilités relatifs aux choix des paramètres de la série. Enfin, la partie 4 se propose d'étudier la vitesse de convergence de ces séries.

Définition 1 : *Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On appelle série congruo-harmonique de paramètres p et q, la série de terme général u_k défini pour tout $k \geqslant 0$ par*

$$u_k = u_{p,q;k} = \frac{(-1)^k}{pk+q}$$

et on note, sous réserve de convergence, $S_{p,q}$ la somme de cette série.

Nous ferons référence aux sommes partielles de cette série par la fonction

$$\phi_{p,q} : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{pk+q} \end{cases}$$

Préliminaires

1. Justifier que, pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, la série $\sum u_k$ converge.
2. Dans cette question, on pose $p = q = 1$. Montrer que
$$\phi_{1,1}(n) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
3. En déduire la valeur de $S_{1,1}$.
4. Montrer alors que, pour tout $q \geqslant 2$,
$$S_{1,q} = (-1)^q \left(\phi_{1,1}(q-2) - \ln 2\right)$$

1 Expression de $S_{p,q}$ sous la forme d'une intégrale

Dans cette partie, on fixe $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et on pose $\alpha_{p,q} = \frac{p}{q}$. On définit alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $I_{p,q} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par

$$I_{p,q}(t) = \int_0^1 \frac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}\,\mathrm{d}x$$

5. Démontrer que l'application $I_{p,q}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
6. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} I_{p,q}(n).$$
7. Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} (-x^{\alpha_{p,q}})^k$ puis en déduire que
$$\phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q}\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}}\,\mathrm{d}x + (-1)^n I_{p,q}(n)\right)$$
8. Montrer alors que, pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$,
$$S_{p,q} = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{1+t^p}\,\mathrm{d}t$$

2 Calcul des $S_{p,q}$ dans trois cas particuliers

L'objectif de cette partie est de déterminer une formulation explicite de la somme de la série congruo-harmonique de paramètres p et q dans trois cas particuliers. On définit pour cela les trois ensembles suivants :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid p = q\} \\ E_2 &= \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid p < q,\ p|q\} \\ E_3 &= \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid p > q\} \end{aligned}$$

Enfin, pour tout couple $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ fixé, on définit la fraction rationnelle $F(X)$ par

$$F(X) = \frac{X^{q-1}}{1+X^p}$$

9. Montrer que, pour tout $(p,q) \in E_1$,
$$S_{p,q} = \frac{\ln 2}{p} \tag{F1}$$

10. Pour tout couple $(p,q) \in E_2$, montrer qu'il existe une constante $\lambda = \lambda(p,q)$ que l'on déterminera, telle que
$$S_{p,q} = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{p}\left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{\lambda-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \tag{F2}$$

Dans le reste de la partie 2, on fixe un couple $(p,q) \in E_3$.

11. Montrer qu'il existe des constantes $(a_0, b_0, \ldots, b_{\lfloor p/2\rfloor-1}) \in \mathbb{C}^{\lfloor p/2\rfloor+1}$ telles que
$$F(X) = \frac{1-(-1)^p}{2}\frac{a_0}{X+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor p/2\rfloor-1}\frac{b_k}{X-\omega_{p,k}} + \frac{b_k}{X-\overline{\omega_{p,k}}}$$
où les $\omega_{p,k}$ sont des constantes que l'on précisera et $F(X)$ la fraction rationnelle définie au début de cette partie.
Dans le cas où p est pair, on posera $a_0 = 0$.

12. Calculer alors a_0 dans le cas où p est impair puis montrer que, pour tout entier $k \in [\![0, \lfloor p/2\rfloor - 1]\!]$, b_k peut s'écrire sous la forme
$$b_k = -\frac{1}{p}e^{iq\theta_k}$$
où on a posé $\theta_k = (2k+1)\frac{\pi}{p}$.

13. En déduire la décomposition en éléments simples de $F(X)$ dans $\mathbf{R}(X)$:
$$F(X) = \frac{1-(-1)^p}{2}\cdot\frac{(-1)^{q-1}}{p}\cdot\frac{1}{X+1} - \frac{2}{p}\sum_{k=0}^{\lfloor p/2\rfloor-1}F_k(X)$$
où, pour tout $0 \leqslant k \leqslant \lfloor p/2\rfloor - 1$,
$$F_k(X) = \frac{\cos(q\theta_k)X - \cos((q-1)\theta_k)}{X^2 - 2\cos(\theta_k)X + 1}$$

On admet que les F_k sont continues sur $[0,1]$ et que pour tout $0 \leqslant k \leqslant \lfloor p/2\rfloor - 1$,
$$\int_0^1 F_k(t)\,\mathrm{d}t = \cos(q\theta_k)\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2p}(p-1-2k)\sin(q\theta_k)$$

14. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est pair} \\ (-1)^{q+1}/2 & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

15. Déduire des questions précédentes que, pour tout $(p, q) \in E_3$,

$$S_{p,q} = \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} (p - 1 - 2k) \sin(q\theta_k) - 2 \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) \ln \left(\sin \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right) \right) \qquad \text{(F3)}$$

16. En déduire les valeurs exactes de $S_{2,1}$ et $S_{3,1}$.

3 Quelques calculs de probabilités

L'objectif de cette partie est d'évaluer la probabilité qu'un couple d'entiers $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ pris au hasard appartienne au domaine d'application d'au moins l'une des formules (F1), (F2) et (F3) obtenues dans la partie 2.

On fixe pour cela $n \in \mathbb{N}^*$ et on décide de tirer successivement et avec remise deux entiers p et q selon une loi uniforme sur l'intervalle $[\![1, n]\!]$. On définit alors les événements suivants, où E_1, E_2 et E_3 sont les trois ensembles définis dans la partie 2 :

$$\begin{aligned} E_n &: \text{ « On obtient } (p, q) \in E_1 \cup E_2 \cup E_3 \text{ »} \\ A_n &: \text{ « On obtient } p = q \text{ »} \\ B_n &: \text{ « On obtient } q > p \text{ et } q \text{ est divisible par } p \text{ »} \\ C_n &: \text{ « On obtient } p > q \text{ »} \end{aligned}$$

17. Justifier que l'ensemble $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme une partition de E_n.
18. Calculer $\mathrm{P}(A_n)$ puis $\mathrm{P}(C_n)$.
19. Montrer que

$$\mathrm{P}(B_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \frac{1}{n}$$

et en déduire $\mathrm{P}(A_n \cup B_n)$.

20. En notant $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la série harmonique, montrer que

$$H_n \sim \ln n \qquad (n \to +\infty)$$

21. Montrer alors que

$$\mathrm{P}(A_n \cup B_n) \sim \frac{\ln n}{n} \qquad (n \to +\infty)$$

22. En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(E_n)$$

4 Vitesse de convergence des $S_{p,q}$

Dans cette dernière partie, on s'intéresse à la vitesse de convergence des séries congruo-harmoniques. On introduit pour cela la définition suivante.

Définition 2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers une limite réelle ℓ telle que $u_n \neq \ell$ à partir d'un certain rang. On définit alors, sous réserve de convergence, la vitesse de convergence V de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par*

$$V = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right|$$

On qualifie alors la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon la valeur de V :

Si $V = 0$, la convergence sera qualifiée de supra-linéaire.

Si $V \in]0, 1[$, la convergence sera qualifiée de linéaire.

Si $V = 1$, la convergence sera qualifiée d'infra-linéaire.

On définit alors la vitesse de convergence d'une série comme étant celle de la suite de ses sommes partielles.
On définit enfin, pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, l'application $R_{p,q} = \frac{1}{q} I_{p,q}$ où $I_{p,q}$ est l'application définie dans la partie 1.

23. À l'aide du changement de variables $s = x^{n+1}$ dans $I_{p,q}(n)$, démontrer que

$$R_{p,q}(n) \sim \frac{1}{2pn} \qquad (n \to +\infty)$$

24. En déduire la vitesse de convergence de la série congruo-harmonique alternée $\sum u_k$, c'est-à-dire celle de la suite des sommes partielles $(\phi_{p,q}(n))_{n\in\mathbb{N}}$.
