Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2 – sujet B
MP
samedi 12 octobre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Questions proches du cours

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que $P \mapsto \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$, et qu'elle n'est pas équivalente à la norme $\|.\|_\infty$ donnée par $\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$.
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la famille $\left(\frac{q^p z^p}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.
4. Soit A une matrice d'ordre n (ce qui signifie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et de rang 1. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine cubique s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$. Dans ce cas, on dit que B est une racine cubique de A.

Partie I - Un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Justifier qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qu'il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement, telle que $A = PDP^{-1}$, avec
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$
2. Montrer qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de A si, et seulement si, $\Delta = P^{-1}BP$ est une racine cubique de D.
3. Soit Δ une racine cubique de D. Montrer que les matrices Δ et D commutent, puis en déduire que Δ est diagonale.

4. Déterminer l'ensemble des racines cubiques de D, puis l'ensemble des racines cubiques de A. On pourra se contenter de décrire ce dernier ensemble en fonction de P et de Δ.

Partie II - Racines cubiques et diagonalisation
Dans toute cette partie, on considère une matrice diagonalisable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A.
Existence d'une racine cubique

5. Soit λ réel et p entier naturel non nul. Déterminer une racine cubique de la matrice :

$$H_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

6. Déduire de la question précédente que la matrice A admet une racine cubique (*c'est-à-dire au moins une racine cubique*).

Réduction d'une racine cubique
Dans cette sous-partie, on suppose de plus que la matrice A est inversible et on considère le polynôme :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{d} (X^3 - \lambda_k)$$

7. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On écrit λ sous la forme $\rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $z^3 = \lambda$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, admet exactement trois solutions.
8. En déduire que si B est une racine cubique de A, alors la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, u un endomorphisme de E, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ m nombres complexes distincts deux à deux.

1. On suppose que u est diagonalisable et que son spectre est $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.
On rappelle que dans ce cas, $E = \bigoplus_{j=1}^{m} E_j$, où chaque E_j est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j.
Montrer qu'il existe des projecteurs de E, $(p_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ non nuls, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k p_j. \qquad (*)$$

2. Dans cette question, on ne suppose plus u diagonalisable.
On suppose cependant qu'il existe une suite d'endomorphismes $(p_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ de E, non nuls, pour laquelle la suite de scalaires $(\lambda_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ vérifie $(*)$.
   (a) Vérifier que l'on a : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \sum_{j=1}^{m} P(\lambda_j) p_j$.
   (b) Montrer que u est diagonalisable. *On pourra chercher un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.*

(c) Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}$.

i. Déterminer, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$, $L_j(\lambda_i)$.

ii. Prouver que la famille $\mathcal{B} = (L_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$.

iii. Soit $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Déterminer les composantes de P dans la base $\mathcal{B}$.

(d) Prouver que l'on a : $\forall j \in [\![1, m]\!]$, $p_j = L_j(u)$.

(e) Démontrer enfin que les λ_j sont les valeurs propres de l'endomorphisme u.

Exercice 3

Soit p un entier naturel non nul et r un nombre réel *strictement positif*. On considère la fonction

$$S_{r,p} : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}.$$

L'objectif du problème est d'établir la validité de l'énoncé suivant :

$$S_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p} x^r e^x \qquad (H_{r,p}).$$

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du nombre réel x, c'est-à-dire l'unique entier k tel que $k \leqslant x < k+1$. On rappelle que par convention $0^0 = 1$, tandis que $0^r = 0$ pour tout réel $r > 0$.

I. Généralités, cas particuliers

1. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{N}^*$. Justifier que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n$ converge pour tout nombre complexe z.
2. Pour x réel, expliciter $S_{0,1}(x)$ et en déduire la validité de l'énoncé $H_{0,1}$.

II. Démonstration de $H_{r,p}$ pour $p \geqslant 2$

On fixe un entier naturel $p \geqslant 2$ et un réel $r > 0$, et l'on se propose de déduire la validité de $H_{r,p}$ de celle de $H_{r,1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $u_n(x) := \frac{n^r}{n!} x^n$.

3. On fixe un réel $x > 0$. Étudier le signe de la fonction

$$\varphi_x : t \in [1, +\infty[\mapsto t^{1-r}(t-1)^r - x.$$

On montrera en particulier que φ_x s'annule en un unique élément de $[1, +\infty[$ que l'on notera t_x. En déduire que la suite finie $(u_n(x))_{0 \leqslant n < \lfloor t_x \rfloor}$ est croissante et que la suite $(u_n(x))_{n \geqslant \lfloor t_x \rfloor}$ est décroissante.

L'ensemble $\{u_n(x) | n \in \mathbb{N}\}$ admet donc un maximum valant $u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)$. Dans la suite de cette partie, ce maximum sera noté M_x.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $\varphi_x(x + \alpha)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que

$$t_x - x - r \underset{x \to +\infty}{\to} 0.$$

Pour établir ce dernier résultat, on pourra revenir à la définition d'une limite.

5. Montrer que pour tout entier relatif k,

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x).$$

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) \geqslant m u_{\lfloor x\rfloor}(x) \quad \text{pour } x \text{ voisin de } +\infty.$$

En déduire que, pour x voisin de $+\infty$,

$$u_{\lfloor x\rfloor}(x) \leqslant \frac{x^r e^x}{m}.$$

7. En déduire que pour tout entier relatif k,

$$u_{\lfloor x\rfloor+k}(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^r e^x)$$

puis que

$$M_x = \underset{x\to+\infty}{o}(x^r e^x).$$

En vue de ce dernier résultat, on pourra commencer par démontrer que, pour x assez grand, $M_x = u_{\lfloor x\rfloor+i}(x)$ pour un entier i compris entre $\lfloor r\rfloor - 1$ et $\lfloor r\rfloor + 2$.

8. Dans cette question et la suivante, on fixe un nombre complexe z tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$D_n := \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |D_n| \leqslant \frac{2}{|1-z|}$$

et que les séries $\sum_n D_n u_{n-1}(x)$ et $\sum_n D_n u_n(x)$ sont absolument convergentes.

9. On conserve le nombre complexe z introduit dans la question précédente. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} D_n(u_{n-1}(x) - u_n(x)) = S_{r,1}(zx)$$

puis que, pour x voisin de $+\infty$,

$$|S_{r,1}(zx)| \leqslant \frac{4M_x}{|1-z|},$$

et conclure à la relation

$$S_{r,1}(zx) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^r e^x).$$

10. On pose $\xi := \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$. Pour tout réel x, montrer que

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = p S_{r,p}(x)$$

et en déduire la validité de $H_{r,p}$.