Devoir surveillé n° 2 – sujet A
MP
samedi 11 octobre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On note $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$ et pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$Q_n = \prod_{i=0}^{n-1}(X + 2i)$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{B}_n = (Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit la fonction $f(P) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule

$$f(P)(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{P(-2k)}{k!}x^k$$

   Montrer que $f(P)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f(Q_n)$.
4. Généralités sur f.
   (a) Justifier la linéarité de f.
   (b) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, la fonction $f(P)$ est polynomiale. On la confondra désormais avec le polynôme correspondant.
   (c) Que dire alors de f ?
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $f(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$. On note f_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par f.
6. Établir la forme générale de la matrice de f_n dans la base $\mathcal{B}_n$ pour déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, le spectre de f_n et la dimension des espaces propres de f_n.
7. Déterminer soigneusement l'ensemble des valeurs propres de f.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n e^{-x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. On pose $I_n = \int\limits_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. On admet que $I_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   (a) Calculer I_1.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.
   (c) Calculer I_{2k+1} pour $k \in \mathbb{N}$.
   (d) Calculer I_{2k} pour $k \in \mathbb{N}$. On demande une expression avec des factorielles.

Exercice 3

On considère un groupe de n personnes, numérotées de 0 à $n-1$. Chaque personne peut connaître une ou plusieurs personnes du groupe, et on écrit $i \to j$ lorsque la personne i connaît la personne j. Les règles de la relation de connaissance sont :

— on ne compte pas le fait que chacun se connaît (on n'a donc pas $i \to i$) ;

— la relation n'est pas symétrique : il se peut que i connaisse j, mais que j ne connaisse pas i.

Une vedette est une personne égocentrique (elle ne connaît personne d'autre) et célèbre (tous les autres la connaissent).

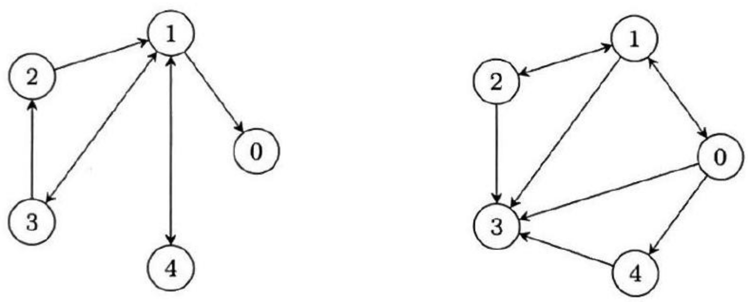

FIGURE 1 – À gauche : un groupe sans vedette. –À droite : 3 est une vedette.

On cherche à déterminer un algorithme qui permette

— de trouver une vedette, s'il en existe une,

— ou de garantir que le groupe ne comporte aucune vedette.

1. Quel est le nombre maximal de vedettes qu'un groupe peut posséder ?

Dans les deux questions suivantes, on stocke en mémoire la relation de connaisance sous forme de « listes des connaissances ». Pour chaque individu i, la liste des connaissances de i est la liste `L[i]` des personnes que i connaît.

Par exemple, si la liste `L [6]` vaut `L[6]=[4,5,12]`, cela signifie que

$$6 \to 4 \quad 6 \to 5 \quad \text{et} \quad 6 \to 12$$

On note `L=[L[0], L[2], ..., L[n-1]]` la liste des listes de connaissances.

2. Écrire une fonction `CombienConnaissent (L, i)` qui renvoie le nombre de personnes connaissant i.
   Proposer une majoration du nombre d'opérations en fonction de n.

On définit la matrice d'adjacence comme la matrice `M` (qui en Python est une liste de listes) dont les coefficients sont

$$\mathrm{M}[i][j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i \rightarrow j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, dans le groupe de gauche de la figure 1 , la matrice d'adjacence est

```
M = [[0, 0, 0, 0, 0] #0 ne connaît personne
    [1, 0, 0, 1, 1] # 1 connait 0, 3 et 4
    [0, 1, 0, 0, 0] #2 connaît 1
    [0, 1, 1, 0, 0] #3 connaît 1 et 2
    [0, 1, 0, 0, 0]] #4 connaît 1
```

3. Écrire une fonction `ListeVersMatrice(L)` prenant en argument la liste des listes de voisins, et renvoyant la matrice d'adjacence `M`.
4. Désormais, on suppose que la relation de connaissance est stockée dans la matrice `M`.
   Écrire une fonction `CombienConnaissent2(M, i)` qui renvoie le nombre de personnes connaissant i.
   Proposer une majoration du nombre d'opérations nécessaires en fonction de n.
5. Proposer une fonction `Debusquer_Vedette(M)` qui renvoie `False` s'il n'y a pas de vedette, ou bien le numéro de la vedette s'il en existe une.
   On impose que le nombre d'opérations effectuées soit un $\mathrm{O}\left(n^2\right)$, c'est-à-dire majoré par $\mathrm{C}^{\text{te}} \cdot n^2$.

6. On suppose dans cette question que le groupe de personnes étudié admet une vedette.
   On exécute le code suivant, dans lequel la matrice M est la matrice d'adjacence du groupe.

```
1 n = len(M)
2 i, j = 0, 1
3 while j < n:
4     if M[i][j] == 1:
5         i = j
6     j += 1
```

   On remarquera que le connaissance d'un élément $\mathrm{M}[i][j]$ (avec $i \neq j$) permet toujours de conclure qu'un individu n'est pas une vedette :

   — si $i \rightarrow j$, alors i n'est pas une vedette ;
   — au contraire, si $i \nrightarrow j$, alors j n'est pas une vedette.

   Montrer que la propriété $I(j)$: « pour tout $k < j$ tel que $k \neq i$, la personne d'indice k n'est pas une vedette »
   est vraie à la fin de la ligne 6 du code précédent (invariant de boucle).
   En déduire que la vedette est la personne d'indice i.

7. En déduire une fonction `Debusquer_Vedette2(M)` résolvant le problème en un nombre d'opérations majoré par $\mathrm{C}^{\text{te}} \cdot n$.

Exercice 4

1. Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. On pose, lorsque cette intégrale existe,

$$\gamma_n = \int_0^1 \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}t$$

   (a) Soit α un réel strictement positif.
      i. Rappeler un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $h \mapsto (1+h)^\alpha$.
      ii. En déduire un équivalent, au voisinage de 1, de $t \mapsto 1-t^\alpha$.

   (b) Soit β un réel. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge.

   (c) Justifier l'existence de γ_n pour tout $n \geqslant 2$.

2. On pose pour tout entier naturel m et pour tout réel u : $U_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{u^k}{k!}$. Montrer :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in \mathbb{R}^-, \quad U_{2p-1} \leqslant e^u \leqslant U_{2p}$$

3. Démontrer que l'on a, pour tout $t \in]0,1[$, pour tout $n \geqslant 2$ et tout $p \geqslant 1$:

$$1 - \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k \leqslant 1 - \exp\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right) \leqslant 1 - \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k$$

4. Prouver que, pour tout entier naturel p non nul et tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}t$ existe.

5. Démontrer que l'on a pour tout $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n^2}\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}t \leqslant \gamma_n \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}t$$

6. Soit p un entier naturel non nul. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}t\right)$.
   Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

7. Prouver alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\gamma_n = \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)}\,\mathrm{d}t$.

8. Prouver, que pour tout entier naturel p, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)t^p\,\mathrm{d}t$ existe.

9. Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel p, $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)t^p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(p+1)^2}$.

10. *(5/2 uniquement)* Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^2}$.

11. Prouver enfin que : $\displaystyle\gamma_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi^2}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. On admettra le résultat : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
