Devoir surveillé n° 2 – sujet A
MP
samedi 12 octobre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Questions proches du cours

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que $P \mapsto \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$, et qu'elle n'est pas équivalente à la norme $\|.\|_\infty$ donnée par $\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la famille $\left(\dfrac{q^p z^p}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.
4. Soit A une matrice d'ordre n (ce qui signifie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et de rang 1. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine cubique s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$. Dans ce cas, on dit que B est une racine cubique de A.

Partie I - Un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Justifier qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qu'il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement, telle que $A = PDP^{-1}$, avec
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$
2. Montrer qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de A si, et seulement si, $\Delta = P^{-1}BP$ est une racine cubique de D.
3. Soit Δ une racine cubique de D. Montrer que les matrices Δ et D commutent, puis en déduire que Δ est diagonale.

4. Déterminer l'ensemble des racines cubiques de D, puis l'ensemble des racines cubiques de A. On pourra se contenter de décrire ce dernier ensemble en fonction de P et de Δ.

Partie II - Racines cubiques et diagonalisation

Dans toute cette partie, on considère une matrice diagonalisable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A.

Existence d'une racine cubique

5. Soit λ réel et p entier naturel non nul. Déterminer une racine cubique de la matrice :

$$H_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

6. Déduire de la question précédente que la matrice A admet une racine cubique (*c'est-à-dire au moins une racine cubique*).

Réduction d'une racine cubique

Dans cette sous-partie, on suppose de plus que la matrice A est inversible et on considère le polynôme :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{d} (X^3 - \lambda_k)$$

7. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On écrit λ sous la forme $\rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $z^3 = \lambda$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, admet exactement trois solutions.
8. En déduire que si B est une racine cubique de A, alors la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, u un endomorphisme de E, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ m nombres complexes distincts deux à deux.

1. On suppose que u est diagonalisable et que son spectre est $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.
   On rappelle que dans ce cas, $E = \bigoplus_{j=1}^{m} E_j$, où chaque E_j est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j.
   Montrer qu'il existe des projecteurs de E, $(p_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ non nuls, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k p_j. \qquad (*)$$

2. Dans cette question, on ne suppose plus u diagonalisable.
   On suppose cependant qu'il existe une suite d'endomorphismes $(p_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ de E, non nuls, pour laquelle la suite de scalaires $(\lambda_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ vérifie $(*)$.
   (a) Vérifier que l'on a : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \sum_{j=1}^{m} P(\lambda_j) p_j$.
   (b) Montrer que u est diagonalisable. *On pourra chercher un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.*

(c) Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}$.

i. Déterminer, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$, $L_j(\lambda_i)$.

ii. Prouver que la famille $\mathcal{B} = (L_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$.

iii. Soit $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Déterminer les composantes de P dans la base $\mathcal{B}$.

(d) Prouver que l'on a : $\forall j \in [\![1, m]\!]$, $p_j = L_j(u)$.

(e) Démontrer enfin que les λ_j sont les valeurs propres de l'endomorphisme u.

Exercice 3

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites réelles (indexées par $\mathbb{N}^*$) à termes strictement positifs telles que la série $\sum a_n$ converge. On pose, pour tout élément $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathscr{E}$ et pour tout entier n non nul,

$$h_n = \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}.$$

L'objet de l'exercice est de prouver la convergence de la série $\sum h_n$ et de comparer sa somme à celle de la série $\sum a_n$.

1. *Un premier exemple.* On pose, dans cette question, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   (a) Montrer que la série $\sum a_n$ converge et déterminer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

   (b) i. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de h_n.

   ii. Établir la convergence de la série $\sum h_n$ et déterminer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n$.

2. *Un second exemple.* Soit q un réel de $]0, 1[$. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = q^{n-1}$.

   (a) Donner $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et pour tout entier naturel n non nul, la valeur de h_n.

   (b) Établir la convergence de la série $\sum h_n$. On **admet** la majoration : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leqslant \frac{1}{(1-q)^2}$.

3. Soit n un entier non nul et soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux n-uplets de nombres réels.

   (a) Prouver l'égalité : $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(x_i\, y_j - x_j\, y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.

   (b) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$.

4. Prouver, pour tout entier naturel k non nul, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{2k^2}$.

   On s'intéressera à la monotonie de la suite de terme général $u_k = \dfrac{1}{2k^2} - \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un élément de $\mathscr{E}$.

   (a) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :
$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right).$$

   (b) En déduire, pour tout entier naturel p non nul, l'inégalité :
$$\sum_{n=1}^{p} h_n \leqslant 4\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k\right).$$

   (c) Prouver, pour tout entier naturel p non nul, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} h_n \leqslant 2\sum_{k=1}^{p} a_k$.

   (d) En déduire la convergence de la série $\sum h_n$ et l'inégalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

6. Soit C un réel strictement positif tel que, pour tout élément $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathscr{E}$, on a
$$\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leqslant C\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$
   On va montrer que C est au moins égal à 2.

   On pose, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1 et on rappelle qu'on dispose de l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   (a) Prouver l'inégalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} - \frac{\pi^2}{6}$.

   (b) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité : $h_n \geqslant (\alpha+1)\dfrac{n}{(n+1)^{\alpha+1}}$.

   (c) Prouver l'égalité : $\displaystyle\lim_{\substack{\alpha\to 1\\ >}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$.

   (d) Conclure que $C \geqslant 2$.

7. On suppose qu'il existe un réel $K > 0$ tel que, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes réels strictement positifs dont la série $\sum a_n$ converge, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leqslant K\sum_{n=1}^{+\infty} h_n$.

   (a) Justifier l'inégalité : $K \geqslant 1$. *On pourra utiliser le résultat de la question 2.*

   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $g_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul,
$$g_n = \begin{cases} \dfrac{4}{2^n} & \text{si } \exists\, p \in [\![1, N]\!] \quad n = p^2 \\[2ex] \dfrac{1}{2^n} & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad a_n = \frac{(g_n)^n}{(g_{n-1})^{n-1}}.$$

      i. Calculer a_n pour $n > N^2 + 1$ et en déduire la convergence de la série $\sum a_n$.

      ii. Prouver les inégalités : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \leqslant 4 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geqslant 2N$.

   (c) Établir l'égalité : $(g_n)^n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k$.

   (d) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $h_n \leqslant g_n$ et en déduire qu'un tel réel K n'existe pas.