Devoir surveillé n° 2
MP
7 octobre 2023

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Questions proches du cours

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que $N : P \mapsto \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Montrer que cette norme n'est pas équivalente à la norme $N_\infty : P \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$.

2. Soient a, b et α trois réels strictement positifs vérifiant : $0 < \alpha < a^2 \leqslant b^2$.
   (a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\alpha \left(\frac{a}{\sqrt{t}} - 1\right)\left(\frac{b}{\sqrt{\alpha - t}} - 1\right)\mathrm{d}t$. Cette intégrale est notée $I_{a,b}(\alpha)$.
   (b) Calculer $I_{a,b}(\alpha)$ à l'aide du changement de variable $t = \alpha\cos^2 u$.

3. SQL. Comme en TP, on dispose de la table **atome** d'attributs `id` (clé primaire), `nom`, `pays`, `anneeDecouverte`, `masseAtomique`.
   (a) Écrire une requête pour afficher les noms des atomes découverts entre 1900 et 1950, en France, et affichés par ordre alphabétique.
   (b) Écrire une requête pour afficher le nombre d'atomes découverts par pays.

4. Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie le plus grand élément d'un tableau d'entiers.

```python
def maxi(t):
    """
    Donnée : t un tableau non vide d entiers
    Résultat : le maximum des éléments de t
    """
    n = len(t) # longueur du tableau t
    maximum = ............
    for k in range(1,n):
        if ..............:
            ..............
    return maximum
```

Exercice 1

On désigne par α un entier strictement supérieur à 1 et on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\mathrm{d}t$$

Dans la suite de l'exercice, on notera u_n au lieu de $u_n(\alpha)$.

1. (a) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le réel u_n est bien défini, et que $u_n > 0$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire qu'elle converge.
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$.
3. Montrer, en considérant $\ln u_n$, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}$.
   (b) En déduire que : $\forall n \geqslant 2$, $\ln S_n = \ln u_1 + \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(1 - \frac{1}{k\alpha}) - \ln(1 - \frac{1}{k})\right]$.
   (c) Donner un équivalent, lorsque k est au voisinage de $+\infty$, de $\ln(1 - \frac{1}{k\alpha}) - \ln(1 - \frac{1}{k})$.
   (d) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.
5. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$. Calculer $u_1(\alpha)$. Écrire une fonction `Python` pour le calcul de u_n.

Exercice 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}),\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \text{ et } \ B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1. On prend **dans cette question**, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.
   Vérifier que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et calculer sa somme.
2. On prend **dans cette question**, $a_n = \frac{1}{n\ln(n)}$, $n \geqslant 2$ et $a_1 = 0$.
   (a) Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$.
   (b) À l'aide d'une comparaison série - intégrale, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge.
   (c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} na_n$.
   (d) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ diverge.
3. On suppose **dans cette question** que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.
   (a) Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ na_{2n} \leqslant u_n$.
   (b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.
   (c) Démontrer alors que $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.
   (d) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge.
   (e) A-t-on $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?
4. On suppose **dans cette question** que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

(a) Vérifier que $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \leqslant n,\ B_n \geqslant A_m - ma_{n+1}$.

(b) En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

(c) En déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Exercice 4

Partie I : Étude de $R_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Rappeler l'énoncé d'un théorème (y compris l'évaluation du reste) permettant de montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^p}{p}$ est convergente, où $p \in \mathbb{N}^*$.

   (b) i. Montrer que $\lim\limits_{q\to+\infty} \int\limits_0^1 \frac{x^q}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$.

   ii. À l'aide d'une suite géométrique, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = (-1)^{n+1} \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

2. (a) Par intégration par parties, montrer qu'il existe un entier $\beta \in \mathbb{N}^*$ et un réel k différent de 0 tel que :

$$R_n = k\frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + O(\frac{1}{n^{\beta+1}})$$

   (b) En déduire la nature de la série de terme général R_n.

3. Déterminer la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} R_n$.

Partie II : Étude de $r_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$, $n \in \mathbb{N}$.

4. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$.

   (a) Montrer que la suite $\left(U_n - \int\limits_1^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\right)_{n\geqslant 1}$ converge. On notera $L = \lim\limits_{n\to+\infty}(U_n - \int\limits_1^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}) - 2$.

   (b) Soit θ un réel strictement supérieur à 1. Justifier l'existence de $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}$ et, en utilisant une comparaison série-intégrale, en trouver un équivalent quand n tend vers l'infini.

5. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = U_n - 2\sqrt{n} - L$.

   (a) Étudier la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ et en déduire que v_n équivaut à $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini.

   (b) De la même, manière, en posant $w_n = v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}}$ et en étudiant la série $w_{n+1} - w_n$, déterminer un équivalent de $v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini. En déduire que U_n est de la forme :

$$U_n = A\sqrt{n} + B + \frac{C}{\sqrt{n}} + O(\frac{C}{n\sqrt{n}})$$

6. (a) Montrer que la série $\sum\limits_{p\geqslant 1} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ converge. On notera $S = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$.

   (b) Exprimer r_{2n} en fonction de S et des sommes partielles U_n et U_{2n} .

(c) En déduire qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que :

$$r_{2n} = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + O(\frac{C}{n\sqrt{n}})$$

Exprimer S en fonction de L et déterminer la nature de la série de terme général r_n.

Exercice 5

Soit d un entier, $d \geqslant 2$. Soit $\omega = (\omega_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de complexes, périodique de période d, c'est-à-dire telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \omega_{n+d} = \omega_n$$

Dans ce problème, on s'intéresse à la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n(\lambda)$ de terme général

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n(\lambda) = \frac{\omega_n + \lambda}{n}$$

où λ est un complexe. On note plus simplement $u_n = u_n(0)$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Supposons, dans cette question uniquement, qu'il existe un complexe λ tel que $\sum u_n(\lambda)$ converge. Montrer que, pour toute valeur $\mu \neq \lambda$, la série $\sum u_n(\mu)$ diverge.
2. Dans cette question, on choisit $\lambda = 0$.
   Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n la somme partielle associée à la série $\sum u_n$, c'est-à-dire $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{k}$.
   (a) Pour tout entier naturel m, exprimer $\displaystyle\frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k}$ en fonction de $\Omega = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \omega_k$.
   (b) Déterminer un réel α tel que
   $$\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md} = \frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} + \frac{\alpha}{m^2} + \underset{m\to\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{m^2}\right).$$
   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur Ω pour que la série $\sum \left(\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md}\right)$ converge.
   (d) Montrer très soigneusement que la condition obtenue à la question précédente est une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ converge.
3. Montrer qu'il existe une unique valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que la série $\sum u_n(\lambda)$ converge.
4. Une généralisation.
   Dans cette question, on se donne une suite croissante $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels, telle que $a_1 > 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. On suppose que $\Omega = 0$. On pose, pour tout $n \geqslant 1$,
   $$u_n = \frac{\omega_n}{a_n} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k.$$
   Par souci de commodité, on note également $\mathrm{T}_0 = 0$.
   (a) Montrer que la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,
   $$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{T}_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) + \frac{\mathrm{T}_n}{a_{n+1}}.$$
   (c) Montrer que la série $\sum \mathrm{T}_k \left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$ converge.
   (d) Montrer que la série $\sum u_k$ converge.