Devoir surveillé n° 1 – sujet B
MP
samedi 14 septembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit g l'application : $\begin{pmatrix} \ker f^2 & \longrightarrow & \ker f \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix}$

1. Montrer que l'application g est bien définie et qu'elle est linéaire.
2. Montrer que $\ker g = \ker f$.
3. Montrer que $\dim(\ker f^2) \leqslant 2\dim(\ker f)$.

Exercice 2

Notations.

- Pour tous entiers i et j vérifiant $i \leqslant j$, la notation $[\![i, j]\!]$ désigne l'intervalle d'entiers $[i, j] \cap \mathbb{N}$.
- La lettre K désigne systématiquement un entier naturel non nul.
- Le symbole $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $K-1$ à coefficients réels.
- Pour tout intervalle I, on note $\mathcal{C}^K(I)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^K$. Pour tous $f \in \mathcal{C}^K(I)$ et $k \in [\![0, K]\!]$, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k (et donc $f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f'\ ,\ f^{(2)} = f''$).
- Dans le cas particulier $I = [0, 1]$, pour toute fonction bornée $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

Soit K réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ de l'intervalle $[0, 1]$. Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant :
Il existe une constante $C > 0$ (dépendant des réels $x_1, \ldots, x_K$) telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^K([0,1]), \quad \max_{0 \leqslant k \leqslant K-1} \left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)| \,. \tag{1}$$

Une inégalité du type précédent est appelée inégalité d'interpolation à l'ordre K.

Cas particulier $K = 1$

On fixe $x_1 \in [0,1]$ et on étudie une inégalité d'interpolation à l'ordre 1 ,

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0,1]), \quad \|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + C\,|f(x_1)|\,. \tag{2}$$

1. Montrer l'inégalité d'interpolation (2) avec $C = 1$.
2. Soit $C \in]0,1[$. À l'aide d'un exemple simple de fonction f, montrer que l'inégalité d'interpolation (2) est fausse.

Cas particulier $K = 2$

On fixe deux réels distincts $x_1 < x_2$ de $[0,1]$. On veut construire une constante $C > 0$ telle qu'on ait l'inégalité d'interpolation à l'ordre 2 ,

$$\forall f \in \mathcal{C}^2([0,1]), \quad \max\left(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\right) \leqslant \|f''\|_\infty + C\left(|f(x_1)| + |f(x_2)|\right) \tag{3}$$

3. Pour tous $x \in [0,1]$ et $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, démontrer l'inégalité
$$\left|f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \leqslant \|f''\|_\infty\,.$$
4. En déduire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, on a
$$\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}$$
5. Conclure le cas $K = 2$ en montrant l'inégalité d'interpolation (3) avec $C = 1 + \dfrac{1}{x_2 - x_1}$.

Cas général par interpolation de Lagrange

On revient à l'étude du cas général d'inégalité d'interpolation à l'ordre K, donnée par (1). On fixe $K \in \mathbb{N}^*$.

6. Démontrer que l'application $\Psi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{K-1}[X] & \to & \mathbb{R}^K \\ P & \mapsto & (P(x_1), \ldots, P(x_K)) \end{array}\right.$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
7. Montrer qu'il existe K polynômes $L_1, \ldots, L_K$ de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$, le polynôme $P = \sum\limits_{j=1}^{K} f(x_j)\,L_j$ vérifie
$$\forall \ell \in [\![1, K]\!], \quad P(x_\ell) = f(x_\ell)\,.$$

Dans les deux questions suivantes 8. et 9., on fixe $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$ et on note P le polynôme déterminé dans la question 7. .

8. Pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, montrer qu'il existe au moins $K - k$ réels distincts de $[0,1]$ en lesquels la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule.
9. En déduire l'inégalité $\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\right\|_\infty$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$.
10. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle l'inégalité d'interpolation (1) est vérifiée.

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit que A est équitable si :

$$\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3,\ a_{i,j} = a_{i,k}a_{k,j}$$

1. Donner deux exemples de matrices équitables pour $n = 3$.
2. Déterminer l'ensemble des matrices A pour lesquelles : A est équitable et $-A$ est équitable.
3. Démontrer que si A est équitable, alors sa transposée $A^\top$ est aussi équitable.
4. On suppose que A est équitable. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,i} = a_{j,j}$.

On suppose désormais que A est une matrice équitable non nulle.

5. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Calculer $a_{k,k}$.
6. Soit B une matrice équitable non nulle. Montrer que $A + B$ n'est pas équitable.
7. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \neq 0$.
8. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, exprimer $a_{i,j}$ en fonction de $a_{i,1}$ et $a_{j,1}$.
9. **Quelques résultats remarquables**
   (a) Montrer que A est de rang 1.
   (b) Calculer A^2.
   (c) (*5/2 uniquement*) La matrice A est-elle diagonalisable ?
   (d) (*5/2 uniquement*) Montrer que la matrice A est semblable à $\mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$.
   (e) (*5/2 uniquement*) Montrer que la matrice A est semblable à la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1.
10. Démontrer que A est symétrique si, et seulement si, A est à coefficients dans $\{-1, 1\}$.
11. Déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables symétriques non nulles.
12. Si G est un groupe fini de $(\mathbb{K}^*, \times)$, déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables à coefficients dans G.
13. Déterminer toutes les matrices carrées équitables de taille 2 à coefficients dans le groupe $\mathbb{U}_2$.

Exercice 4

Dans tout cet exercice, a désigne un réel.
On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.
Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.
La partie I étudie le cas où P est constant. La partie II étudie le cas où $a \neq 1$.

Partie I
Dans cette partie, on pose $E_a^{(0)} = \Big\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\quad \exists b \in \mathbb{R};\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = au_n + b\Big\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(0)}$. Il existe donc b réel tel que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = au_n + b$.
   Montrer l'unicité de b. On notera $b = b_u$ pour $u \in E_a^{(0)}$.
2. (a) Déterminer $E_1^{(0)}$.
   (b) Déterminer $E_0^{(0)}$.
   Dans le reste de cette partie, a est supposé différent de 1.
3. Montrer que $E_a^{(0)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
4. Soit x la suite constante égale à 1 et soit y la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $y_n = a^n$.
   Montrer que (x, y) est une famille libre de $E_a^{(0)}$. On précisera les valeurs de b_x et b_y.
5. Soit $u \in E_a^{(0)}$.
   (a) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que
   $$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$$
   (b) Montrer que, pour λ et μ définis à la question précédente, pour tout n de $\mathbb{N}$,
   $$u_n = \lambda x_n + \mu y_n$$
   (c) Que peut-on en conclure ?
6. Déterminer $E_a^{(0)}$. On donnera en particulier la dimension de $E_a^{(0)}$.

Partie II

Dans cette partie, on suppose que $a \neq 1$.
On fixe un entier naturel p. On note $\mathbb{R}_p[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale.
On pose $E_a^{(p)} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \quad \exists P \in \mathbb{R}_p[X]; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)\right\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(p)}$. Il existe donc $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$
   Montrer l'unicité de P. On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.
2. Montrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. Montrer que l'application θ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u) = P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.
4. Déterminer $\ker \theta$.
5. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.
   (a) Quel est le degré de Q_k ?
   (b) Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.
6. (a) Montrer que pour tout k dans $\{0, 1, \ldots, p\}$, Q_k est dans l'image de θ, notée $\operatorname{Im} \theta$.
   (b) Que peut-on en conclure ?
7. Déduire des questions précédentes la dimension de $E_a^{(p)}$.
8. Pour $k \in \{0, 1, \ldots, p\}$, on pose $x^{(k)}$ la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $\quad x_n^{(k)} = n^k$.
   On rappelle que y est la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $\quad y_n = a^n$.
   Montrer que $(x^{(0)}, \ldots, x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.
9. *Application :* déterminer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :
   $$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7 \\ \qquad\qquad\qquad u_0 = -2 \end{cases}$$