Devoir surveillé n° 1
MP
samedi 14 septembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Questions proches du cours

Les questions sont indépendantes.

1. En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes, calculer le polynôme caractéristique de la matrice suivante, et présenter la réponse sous forme factorisée. En déduire les valeurs propres de A.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ donné par sa représentation matricielle M dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, où
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Déterminer l'image et le noyau de f (on demande une base de chacun de ces espaces).

3. Donner une base de $F = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n & = 0 \end{cases} \right\}$.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit g l'application : $\begin{pmatrix} \ker f^2 & \longrightarrow & \ker f \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix}$

1. Montrer que l'application g est bien définie et qu'elle est linéaire.
2. Montrer que $\ker g = \ker f$.
3. Montrer que $\dim(\ker f^2) \leqslant 2 \dim(\ker f)$.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.
On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ sa base canonique.
Soient $a_1, \dots, a_n$, n réels vérifiant : $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

1. Montrer que l'application : $T : P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$.
2. On note $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $L_i = T^{-1}(e_i)$, c'est-à-dire l'unique polynôme de E dont l'image par T est e_i. Montrer que $\mathcal{B}' = (L_1, \dots, L_n)$ est une base de E puis déterminer les composantes d'un polynôme P quelconque de E dans cette base.
3. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.
   Donner, sans justification, les polynômes L_1, L_2, L_3.
4. On revient au cas général.
   Établir la relation : $\sum\limits_{i=1}^{n} L_i = 1$.
5. Dans cette question, on suppose que $n \geqslant 4$ et on utilise les polynômes L_1, L_2 et L_3 de la question 2.
   Soit u l'endomorphisme de E défini par :
   $$\forall P \in E, u(P) = Q \qquad \text{avec} \quad Q(X) = P(0)L_1(X) + P(1)L_2(X) + P(2)L_3(X)$$
   Déterminer $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit que A est équitable si :

$$\forall (i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3,\ a_{i,j} = a_{i,k}a_{k,j}$$

1. Donner deux exemples de matrices équitables pour $n = 3$.
2. Déterminer l'ensemble des matrices A pour lesquelles : A est équitable et $-A$ est équitable.
3. Démontrer que si A est équitable, alors sa transposée $A^\top$ est aussi équitable.
4. On suppose que A est équitable. Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,i} = a_{j,j}$.

On suppose désormais que A est une matrice équitable non nulle.

5. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Calculer $a_{k,k}$.
6. Soit B une matrice équitable non nulle. Montrer que $A + B$ n'est pas équitable.
7. Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} \neq 0$.
8. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, exprimer $a_{i,j}$ en fonction de $a_{i,1}$ et $a_{j,1}$.
9. **Quelques résultats remarquables**
   (a) Montrer que A est de rang 1.
   (b) Calculer A^2.
   (c) (*5/2 uniquement*) La matrice A est-elle diagonalisable ?
   (d) (*5/2 uniquement*) Montrer que la matrice A est semblable à $\mathrm{diag}(n, 0, \dots, 0)$.

(e) (*5/2 uniquement*) Montrer que la matrice A est semblable à la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1.

10. Démontrer que A est symétrique si, et seulement si, A est à coefficients dans $\{-1, 1\}$.
11. Déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables symétriques non nulles.
12. Si G est un groupe fini de $(\mathbb{K}^*, \times)$, déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables à coefficients dans G.
13. Déterminer toutes les matrices carrées équitables de taille 2 à coefficients dans le groupe $\mathbb{U}_2$.

Exercice 4

Dans tout cet exercice, a désigne un réel.
On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.
Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.
La partie I étudie le cas où P est constant. La partie II étudie le cas où $a \neq 1$.

Partie I
Dans cette partie, on pose $E_a^{(0)} = \Big\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \quad \exists b \in \mathbb{R}; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b\Big\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(0)}$. Il existe donc b réel tel que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = au_n + b$.
   Montrer l'unicité de b. On notera $b = b_u$ pour $u \in E_a^{(0)}$.
2. (a) Déterminer $E_1^{(0)}$.
   (b) Déterminer $E_0^{(0)}$.
   Dans le reste de cette partie, a est supposé différent de 1.
3. Montrer que $E_a^{(0)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
4. Soit x la suite constante égale à 1 et soit y la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $y_n = a^n$.
   Montrer que (x, y) est une famille libre de $E_a^{(0)}$. On précisera les valeurs de b_x et b_y.
5. Soit $u \in E_a^{(0)}$.
   (a) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que
   $$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$$
   (b) Montrer que, pour λ et μ définis à la question précédente, pour tout n de $\mathbb{N}$,
   $$u_n = \lambda x_n + \mu y_n$$
   (c) Que peut-on en conclure ?
6. Déterminer $E_a^{(0)}$. On donnera en particulier la dimension de $E_a^{(0)}$.

Partie II
Dans cette partie, on suppose que $a \neq 1$.
On fixe un entier naturel p. On note $\mathbb{R}_p[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale.
On pose $E_a^{(p)} = \Big\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \quad \exists P \in \mathbb{R}_p[X]; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = au_n + P(n)\Big\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(p)}$. Il existe donc $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

   Montrer l'unicité de P. On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.
2. Montrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. Montrer que l'application θ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u) = P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.
4. Déterminer $\ker \theta$.
5. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.
   (a) Quel est le degré de Q_k ?
   (b) Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.
6. (a) Montrer que pour tout k dans $\{0, 1, \ldots, p\}$, Q_k est dans l'image de θ, notée $\operatorname{Im} \theta$.
   (b) Que peut-on en conclure ?
7. Déduire des questions précédentes la dimension de $E_a^{(p)}$.
8. Pour $k \in \{0, 1, \ldots, p\}$, on pose $x^{(k)}$ la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $x_n^{(k)} = n^k$.
   On rappelle que y est la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $y_n = a^n$.
   Montrer que $(x^{(0)}, \ldots, x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.
9. *Application :* déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$
