Devoir des 5/2 - septembre 2025
MP
pour jeudi 25 septembre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou $\boxed{\text{encadrer}}$ les résultats. Temps conseillé : 3 à 4 heures. Bon travail !

Partie 1. Polynômes réciproques.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré p est dit réciproque lorsqu'il satisfait l'égalité

$$P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$$

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré p. On écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, où $a_0, \ldots, a_p$ sont des nombres complexes, et $a_p \neq 0$.
   Montrer que P est réciproque si et seulement si pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant p$, on a l'égalité $a_k = a_{p-k}$.
2. Soit P un polynôme de degré p écrit sous forme factorisée $P = a_p \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)^{m_i}$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sont les racines complexes distinctes de P et $m_1, \ldots, m_d$ leur multiplicité.
   Écrire sous forme factorisée le polynôme $X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$ et démontrer que si P est réciproque alors pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant d$, λ_i est non nul et $\frac{1}{\lambda_i}$ est racine de P avec la multiplicité m_i.
3. Soit Q un polynôme de degré p. On dit que Q est antiréciproque si

$$Q(X) = -X^p Q\left(\frac{1}{X}\right)$$

   Montrer que si Q est antiréciproque, 1 est une racine de Q et qu'il existe un polynôme P constant ou réciproque tel que $Q = (X-1)P$.

Soit R un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ ayant la propriété suivante :

Toute racine a de R est non nulle et $\frac{1}{a}$ est racine de R de même multiplicité que a.

4. Démontrer que le produit des racines de R, comptées avec multiplicités, ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1.
5. Montrer que R est réciproque ou antiréciproque.

Partie 2. Le cas diagonalisable.
Soit A une matrice appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

6. Soit x un nombre réel non nul. Exprimer $\det(xI_n - A)$ en fonction de x, $\det A$ et $\det(\frac{1}{x}I_n - A^{-1})$.
7. On suppose dans cette question que A est semblable à son inverse. Préciser les valeurs que peut prendre le déterminant de A, et en déduire que χ_A est soit réciproque, soit antiréciproque.
8. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. On suppose que le polynôme caractéristique de B est réciproque ou antiréciproque. Démontrer que B est inversible et semblable à son inverse.

9. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ n'est pas semblable à son inverse (bien que son polynôme caractéristique $(X-2)^2(X-\frac{1}{2})^2$ soit réciproque).
On pourra déterminer les espaces propres de B et B^{-1} pour la valeur propre 2.

Ainsi, hors du cas diagonalisable, le polynôme caractéristique ne suffit pas à caractériser les matrices semblables à leur inverse. La suite du problème se propose de caractériser ces matrices par une autre méthode.

Partie 3. Produits de matrices de symétries. On dit qu'un endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est une symétrie si $f \circ f = Id_E$. On dit qu'une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice de symétries si $S^2 = I_n$.

10. Démontrer que si S_1 et S_2 sont deux matrices de symétrie, la matrice produit $A = S_1 S_2$ est inversible et semblable à son inverse.
11. Si une matrice A est un produit de deux matrices de symétries, en est-il de même de toute matrice semblable à A ?

Soit B et C deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ la matrice définie par blocs suivante :

$$A = \begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix}$$

12. Soit S_1 la matrice par blocs
$$S_1 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix}$$
où P, Q sont deux éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Déterminer les conditions reliant B, C, P, Q pour que les matrices S_1 et $S_2 = S_1 A$ soient des matrices de symétries.
13. En déduire que si C est semblable à B^{-1}, alors A est un produit de deux matrices de symétries.

Partie 4. La matrice $J_n(\lambda)$.

14. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit g un endomorphisme de E tel que $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$.
Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de g est la matrice N ci-après :
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Autrement dit : $N = (n_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $n_{i,j} = 1$ si $j = i+1$ et $n_{i,j} = 0$ sinon.
15. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul, on pose $J_n(\lambda) = \lambda I_n + N$.
Démontrer que $J_n(\lambda)$ est inversible et déterminer en fonction de N et de λ la matrice N' telle que $J_n(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_n + N'$.
16. Calculer $(N')^n$ et en déduire que $J_n(\lambda)^{-1}$ est semblable à $J_n\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Pour tout polynôme $P = P(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on pose

$$\begin{cases} s_1(P) = P(-X) \\ s_2(P) = P(1-X) \\ g(P) = P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

On définit ainsi trois endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ (il n'est pas demandé de le prouver).

17. Calculer s_1^2, s_2^2 et exprimer $s_1 \circ s_2$ en fonction de g et $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}$.
18. Soit P un polynôme non constant. Exprimer le degré du polynôme $g(P)$ en fonction du degré de P.
19. Déduire des questions précédentes que la matrice $J_n(1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

On pourrait démontrer par le même type de raisonnement, et on l'admet, que la matrice $J_n(-1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

Partie 5. Une caractérisation des matrices semblables à leur inverse.
Soit A une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ semblable à son inverse. On admet le résultat suivant :

A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A (pas nécessairement distinctes) et r ainsi que les n_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, des entiers naturels non nuls.
De plus la matrice A' est unique à l'ordre près des blocs.

20. Démontrer que A^{-1} est semblable à

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(\frac{1}{\lambda_1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\frac{1}{\lambda_2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}(\frac{1}{\lambda_r}) \end{pmatrix}$$

21. En utilisant les résultats établis dans les parties précédentes, démontrer que A est un produit de deux matrices de symétries.
22. Bonus. Démontrer la partie *existence* du résultat admis dans cette partie.
