Devoir maison des 5/2 septembre
pour mardi 24 septembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !

Le thème du problème est le comportement asymptotique des restes des séries numériques convergentes, à travers des exemples variés. L'énoncé est divisé en quatre parties largement indépendantes, que les candidats ne sont pas tenus de traiter dans l'ordre.

Pour toute suite réelle $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$, on notera $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ la série de terme général u_n et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la somme de cette série lorsqu'elle est convergente.

Partie I – Exemples de calcul explicite du reste

1. Rappeler pourquoi, lorsque la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente, la suite de terme général $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$ est convergente. Quelle est alors sa limite ?
2. Dans cette question, x désigne un nombre réel non nul, de signe quelconque.
   (a) Démontrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est convergente. Quelle est sa somme ?
   (b) Établir, pour tout nombre entier strictement positif n, l'égalité :
   $$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{(2n-2)!} \operatorname{sh}(t)\, \mathrm{d}t$$
   (c) Donner une expression similaire de $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$, sous la forme d'une intégrale.
3. (a) Démontrer que la série de terme général $a_n = \arctan\left(\frac{2n}{n^4+n^2+2}\right)$ est convergente.
   (b) Trouver un couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient :
   $$\begin{cases} P(X) - Q(X) & = 2X \\ P(X)Q(X) & = X^4 + X^2 + 1 \end{cases}$$
   (c) Établir que pour tout couple (x, y) de nombres réels positifs ou nuls, on a :
   $$\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) = \arctan(x) - \arctan(y)$$
   (d) Déduire des deux questions précédentes que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k = \frac{\pi}{2} - \arctan(n^2 - n + 1)$$

(e) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k\right)$ est-elle convergente ?

Partie II – Exemples d'évaluation asymptotique du reste

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^x}$ est convergente si, et seulement si, x est strictement supérieur à 1.

5. Dans cette question, on suppose que le réel x est strictement supérieur à 1 et, pour tout entier n strictement positif, on note $r_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln k}{k^x}$.

   (a) Pour tout réel a strictement positif, justifier l'égalité :
$$\int_a^{+\infty}\frac{\ln t}{t^x}\,\mathrm{d}t = \frac{a^{1-x}(1+(x-1)\ln a)}{(x-1)^2}$$

   (b) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, la double inégalité :
$$\int_n^{+\infty}\frac{\ln t}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant r_n \leqslant \int_{n-1}^{+\infty}\frac{\ln t}{t^x}\,\mathrm{d}t$$

   (c) En déduire que r_n est équivalent à $\dfrac{\ln n}{(x-1)n^{x-1}}$ quand n tend vers l'infini.

6. Sommation des relations de comparaison.
On considère deux suites v et w à termes réels non nuls. On suppose que $v_n \sim w_n$ quand n tend vers l'infini et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente. On rappelle que, si les termes de la suite v sont positifs, alors :

   - la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ est convergente.
   - on a $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} w_k \sim \sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k$ quand n tend vers l'infini.

   (a) À l'aide d'un contre-exemple, montrer que la première de ces deux propriétés de w ne serait pas assurée si le signe des termes de la suite v n'était pas constant.

   (b) Montrer de même que, lorsque le signe des termes de la suite v n'est pas constant, il est possible que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ soit convergente mais que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} w_k$ ne soit pas équivalent à $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k$ quand n tend vers l'infini. *On pourra utiliser pour w la suite de terme général*
$$\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n(n+1)}$$

7. Un exemple probabiliste.
Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$. On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et que X et Y sont indépendantes.

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathrm{P}(X \geqslant n)$.

   (b) Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité
$$\mathrm{P}(X+Y=n) = p(1-p)^{n-1}e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)^k$$

(c) Démontrer que $\mathrm{P}(X+Y \geqslant n)$ est équivalent à $e^{\lambda p/(1-p)}(1-p)^{n-1}$ quand n tend vers l'infini.

(d) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(X+Y \geqslant n)$ est convergente. Que vaut sa somme ?

Partie III – Étude du reste comme opérateur

Partie facultative dans ce devoir.

On note L_∞ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites bornées et $\|.\|_\infty$ la norme sur L_∞ définie par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \|u\|_\infty = \sup\{|u_n|,\ n \in \mathbb{N}\}$$

8. Montrer que l'espace vectoriel F des suites réelles convergentes et de limite nulle est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(L_\infty,\ \|.\|_\infty)$.

9. On note E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n$ converge.
   (a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de F.
   (b) L'ensemble E est-il une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(L_\infty,\ \|.\|_\infty)$? Quelle est son adhérence ?

10. On note Φ l'application qui, à tout élément $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E associe la suite $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$$
   (a) Calculer $\|u\|_\infty$ et $\|\Phi(u)\|_\infty$ lorsque u est une suite géométrique convergente de premier terme u_0 égal à 1.
   (b) Démontrer que Φ est une application linéaire et injective de E dans L_∞, dont l'image est F.

11. On note Ψ la restriction de Φ à E, considérée comme une bijection de E sur F. On munit E et F de la norme $\|.\|_\infty$.
   (a) L'application Ψ est-elle continue ?
   (b) L'application réciproque Ψ^{-1} est-elle continue ?

Partie IV – Restes de séries alternées

Dans cette partie, f désigne une fonction dérivable sur $[0,+\infty[$, décroissante et convexe, à valeurs strictement positives et de limite nulle en $+\infty$.

12. Établir, pour tout réel positif ou nul t, la double inégalité :
$$0 \leqslant \frac{f(t)-f(t+1)}{f(t)} \leqslant -\frac{f'(t)}{f(t)}$$

13. Pour tout entier positif ou nul, on pose : $u_n = (-1)^n f(n)$.
   (a) Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.
   (b) Pour tout entier positif ou nul n, on pose : $r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$. Démontrer que pour tout entier positif ou nul n, on a :
   - $|r_n| = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} (-1)^p f(n+p)$
   - $0 \leqslant |r_n| - |r_{n+1}| \leqslant f(n) - f(n+1)$.

(c) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} r_n$ est convergente.

(d) Démontrer que, si le quotient $\frac{f'(t)}{f(t)}$ tend vers 0 quand le réel t tend vers l'infini, alors r_n est équivalent à $\frac{u_n}{2}$ quand n tend vers l'infini.

14. (a) Pour quelles valeurs du réel x, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ est-elle convergente ?

(b) Pour ces valeurs, déduire des résultats précédents un équivalent de $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^x}$ quand n tend vers l'infini.

15. (a) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est convergente.

(b) La série de terme général $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$ est-elle convergente ?
