

Devoir des 5/2 – octobre 2025

MP

pour jeudi 9 octobre 2025



La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.

Temps conseillé : 4 heures. Bon travail !

- On considère un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$ sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). $\mathcal{L}(E)$ désigne la $\mathbb{K}$ -algèbre des endomorphismes de E . Si $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, l'endomorphisme composé $u \circ v$ sera tout simplement noté uv ; $[u, v]$ désignera l'endomorphisme $uv - vu$ et l'identité se notera Id .
- Si u est un endomorphisme de E , on note $\text{Tr}(u)$ la trace de u et $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u . $\mathcal{T}$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E de trace nulle. Si λ est une valeur propre de u , on notera $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ .
- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $u^0 = \text{Id}$ et si $k \geq 1$, $u^k = uu^{k-1}$. On rappelle qu'un endomorphisme u est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ (endomorphisme nul).
- On définit l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E)^2 & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ (u, v) & \longmapsto [u, v] \end{cases}$$

et, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application

$$\Phi_u : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ v & \longmapsto [u, v] \end{cases}$$

- Pour $(m, p) \in \mathbb{N}^2$, on note $M_{m,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à m lignes et p colonnes. I_m est la matrice identité d'ordre m . Enfin, $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ désigne la matrice carrée d'ordre n de terme général $\alpha_i \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker (on rappelle que $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$).

Partie I

I.A Quelques propriétés de Φ_u

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que Φ est une application bilinéaire antisymétrique (c'est-à-dire que $\Phi(u, v) = -\Phi(v, u)$).
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme qui n'est pas une homothétie. Montrer que $\text{vect}(\text{Id}, u, \dots, u^{n-1})$ est inclus dans $\ker \Phi_u$ et que $\dim(\ker \Phi_u) \geq 2$.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $v \in \ker \Phi_u$ alors $v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$.
5. Montrer que l'image de Φ est incluse dans $\mathcal{T}$ et que, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Im } \Phi_u \subset \mathcal{T}$.
Existe-t-il $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $[u, v] = \text{Id}$? Peut-on avoir $\text{Im } \Phi_u = \mathcal{T}$?
6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
 - (a) Montrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
 - (b) En déduire que $\ker \Phi_u = \mathcal{L}(E)$ si et seulement si u est une homothétie.
7. (a) Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer par récurrence que pour tout

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Phi_u^k(v) = \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{k}{p} u^{k-p} v u^p$$

- (b) En déduire que si u est nilpotent, alors Φ_u l'est aussi.

I.B Détermination de l'image de Φ

Soit u un endomorphisme non nul de E de trace nulle.

8. u peut-il être une homothétie ?
9. Montrer qu'il existe $e_1 \in E$ tel que la famille $(e_1, u(e_1))$ soit libre.
10. En déduire l'existence d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice A de u dans cette base soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & X^T \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$$

où $(X, Y) \in M_{n-1,1}(\mathbb{K})^2$ et $A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{K})$.

11. On suppose $A_1 = UV - VU$ avec $(U, V) \in M_{n-1}(\mathbb{K})^2$.
 - (a) Montrer que l'on peut trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que la matrice $U - \alpha I_{n-1}$ soit inversible.
 - (b) On pose $U' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} 0 & R^T \\ S & V \end{pmatrix}$ avec $(R, S) \in M_{n-1,1}(\mathbb{K})^2$. Établir l'équivalence

$$A = U'V' - V'U' \iff \begin{cases} X^T = -R^T(U - \alpha I_{n-1}) \\ Y = (U - \alpha I_{n-1})S \end{cases}$$

12. Montrer alors par récurrence que l'image de Φ est égale à $\mathcal{T}$.

I.C Détermination de $\text{Tr}(\Phi_u)$

Soit u un endomorphisme de E . Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u dans cette base. Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $u_{i,j}$ désigne l'endomorphisme de E tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$$

13. Rappeler pourquoi $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.
14. Calculer, pour tout $(i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$, le produit $u_{i,j}u_{k,\ell}$ et montrer que l'on a :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \Phi_u(u_{i,j}) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{k=1}^n a_{j,k} u_{i,k}$$

15. En déduire $\text{Tr}(\Phi_u)$.

Partie II

II.A Cas où u est diagonalisable

Dans cette sous-partie, on suppose que u est diagonalisable. On pose $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, m_i désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i de u .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u . Pour simplifier les notations, on pose $u(e_i) = \mu_i e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

16. (a) Montrer que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \Phi_u(u_{i,j}) = (\mu_i - \mu_j) u_{i,j}$$

- (b) En déduire que Φ_u est diagonalisable et préciser $\text{Sp}(\Phi_u)$.

17. Montrer que

$$\ker \Phi_u = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, v(E_{\lambda_i}(u)) \subset E_{\lambda_i}(u)\}$$

18. En déduire que $\ker \Phi_u$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E_{\lambda_1}(u)) \times \mathcal{L}(E_{\lambda_2}(u)) \times \dots \times \mathcal{L}(E_{\lambda_p}(u))$. Quel est le rang de Φ_u ?
19. On suppose en plus que u a n valeurs propres distinctes. Quel est la dimension de $\ker \Phi_u$? Quel est le polynôme minimal de u ? En déduire que $\ker \Phi_u = \text{vect}(\text{Id}, u, \dots, u^{n-1})$.

II.B Cas où $\dim E = 2$

On suppose dans cette sous-partie que $\dim E = 2$. Soit u un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie.

20. Montrer que $\ker \Phi_u = \text{vect}(\text{Id}, u)$. On pourra utiliser une base de E de la forme $(e, u(e))$ dont on justifiera l'existence.
21. Montrer que le polynôme caractéristique de Φ_u est de la forme $X^2(X^2 + \beta)$ avec $\beta \in \mathbb{K}$.
22. Si $\beta = 0$, l'endomorphisme Φ_u est-il diagonalisable ?
23. On suppose $\beta \neq 0$. Étudier la diagonalisabilité de Φ_u selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
24. On suppose Φ_u diagonalisable.
 - (a) Montrer que $\text{Sp}(\Phi_u) = \{0, \lambda, -\lambda\}$ où λ est un scalaire non nul.
Dans la suite de la question, v désigne un vecteur propre de Φ_u associé à la valeur propre λ .
 - (b) L'endomorphisme v peut-il être inversible ? Calculer $\text{Tr}(v)$ puis v^2 .
 - (c) Détermination de $\text{Sp}(u)$.
 - i. Pour quelles valeurs du vecteur e , la famille $(e, v(e))$ est-elle une base de E ?
 - ii. Vérifier que la matrice de u dans une telle base est triangulaire inférieure puis en déduire que

$$\text{Sp}(u) = \left\{ \frac{\text{Tr}(u) - \lambda}{2}, \frac{\text{Tr}(u) + \lambda}{2} \right\}.$$

- (d) En déduire que u est diagonalisable.

II.C Cas où Φ_u est diagonalisable

Soit u un endomorphisme de E tel que Φ_u soit diagonalisable et $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_{n^2})$ une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de vecteurs propres de Φ_u de sorte que $\Phi_u(v_i) = \beta_i v_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$. Soient enfin $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $x \in E$ un vecteur propre associé.

25. Calculer $u(v_i(x))$ en fonction de λ , β_i et $v_i(x)$.
26. Montrer que l'application

$$\Psi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow E \\ v & \longmapsto v(x) \end{cases}$$

est linéaire surjective.

27. Montrer alors que u est diagonalisable.

Partie III

Soient λ une valeur propre non nulle de Φ_u et v un vecteur propre associé. On désigne par P_u le polynôme caractéristique de u .

28.
 - (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{K}, v(x \text{ Id} - u) = ((x + \lambda) \text{ Id} - u)v$.
 - (b) Qu'en déduit-on sur P_u si $\det(v) \neq 0$?
 - (c) Montrer alors que l'endomorphisme v n'est pas inversible.
 - (d) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$. Qu'en déduit-on si $v^p \neq 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$?
 - (e) Conclure que $v^n = 0$.

Dans la suite, on suppose que $v^{n-1} \neq 0$.

29. Soit $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$. Montrer que la famille $(e, v(e), \dots, v^{n-1}(e))$ est une base de E et écrire la matrice de l'endomorphisme v dans cette base.
30. On pose $\mathcal{A} = \{w \in \mathcal{L}(E) \mid wv - vw = \lambda w\}$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{A}$ contient l'endomorphisme w_0 dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est $\text{diag}(0, \lambda, 2\lambda, \dots, (n-1)\lambda)$.
 - (b) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{L}(E)$ dont on précisera la direction.
 - (c) Déterminer la dimension ainsi qu'une base de la direction de $\mathcal{A}$.

31. Quelle est alors la forme de la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme u ?
32. On suppose dans cette question que la matrice de u dans une base $\mathcal{B}'$ de E est de la forme $\text{diag}(\alpha, \alpha + \lambda, \dots, \alpha + (n - 1)\lambda)$. Décrire par leur matrice dans la base $\mathcal{B}'$ les éléments de l'espace $E_\lambda(\Phi_u)$. Quelle est sa dimension ?
-