Devoir maison des 5/2 – MP
octobre 2023
avant le 17 octobre 2023

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !
Pour ce devoir, il est demandé de rendre les parties 1 et 2.

Dans tout le texte, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
Pour $a < b$ dans $\mathbb{Z}$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1}. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ est une base. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $\mathrm{cd}(P)$ désigne le coefficient dominant de P, c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.
Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0, k]\!]$, le coefficient binomial $\binom{k}{j}$ vaut $\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.
Pour un ensemble E et $f : E \to E$, on définit l'application $f^k : E \to E$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p.

1 L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

1.1 L'opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par :

$$\tau : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{pmatrix}$$

1. Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\mathrm{cd}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P.
3. Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ de τ dans la base $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j.
4. L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1}. L'expression de τ^j trouvée à la question 1.1.2 pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $j \in \mathbb{Z}$?
5. Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j.
6. On se donne une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j \tag{1}$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

7. En déduire la formule d'inversion : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \tag{2}$$

8. On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la formule (1) ? Vérifier alors la formule (2).

1.2 L'opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$:

$$\delta : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right)$$

1. Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\mathrm{cd}(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.
2. En déduire le noyau $\ker(\delta)$ et $\mathrm{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ.
3. Plus généralement, pour $j \in [\![1, n]\!]$, montrer les égalités suivantes :

$$\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \tag{3}$$

4. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in [\![0, k]\!]$.
5. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \tag{4}$$

6. Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.
   (a) Montrer que u et δ^2 commutent.
   (b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (d) Conclure.
7. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ.
   (a) Pour P polynôme non nul de degré $d \leqslant n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?
   (b) En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

2 Applications en combinatoire

Pour tout couple (p, k) d'entiers naturels non nuls, on note $S(p, k)$ le nombre de surjections de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$. De façon cohérente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(p, 0) = 0$.

2.1 Quelques cas particuliers

1. Que vaut $S(p, n)$ pour $p < n$?
2. Déterminer $S(n, n)$.
3. Déterminer $S(n + 1, n)$.

2.2 Recherche d'une expression générale

1. Combien y a-t-il d'applications de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
2. Pour $p \geqslant n$, établir la formule
$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(p, k) \tag{5}$$
où $S(p, 0) = 0$ par convention.
3. En déduire une expression de $S(p, n)$ pour $p \geqslant n$.
4. En relisant la question 1.2.5, commenter la cohérence de cette expression pour $p < n$.

2.3

1. Simplifier autant que possible les expressions suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}$$

3 Étude d'une famille de polynômes

On considère la famille de polynômes

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_k = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} (X - j) \quad \text{pour } k \in [\![1, n]\!] \end{cases}$$

3.1 Généralités

1. Montrer que la famille $(H_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\delta(H_0)$ et, pour $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer $\delta(H_k)$ à l'aide de H_{k-1}.
3. La matrice M définie à la question 1.A.3 et la matrice M' de taille $n + 1$ donnée par
$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
sont-elles semblables ?

4. Montrer que, pour $k, \ell \in [\![0, n]\!]$,

$$\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$$

5. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} (\delta^k(P))(0) H_k$$

3.2 Étude d'un exemple

1. Donner les coordonnées du polynômes $X^3 + 2X^2 + 5X + 7$ dans la base (H_0, H_1, H_2, H_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que

$$\delta^2(P) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$$

3. Déterminer les suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que

$$u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = k^3 + 2k^2 + 5k + 7 \qquad (k \in \mathbb{N})$$

3.3 Polynômes à valeurs entières

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_n(k)$. On distinguera trois cas : $k \in [\![0, n-1]\!]$, $k \geqslant n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.
2. En déduire que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que H_n est à valeurs entières sur les entiers.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que $\delta(P)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.
4. Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ sont entières.
5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est à valeurs entières sur les entiers alors $d!\,P$ est un polynôme à coefficients entiers. Étudier la réciproque.

4 Généralisation de l'opérateur de différence et application

Pour une application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on définit l'application

$$\delta(f) : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x+1) - f(x) \end{pmatrix}$$

4.1

1. Montrer que $\delta(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comparer $(\delta(f))'$ et $\delta(f')$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, exprimer $(\delta^n(f))(x)$ à l'aide des coefficients binomiaux $\binom{n}{j}$ et des $f(x+j)$ (où l'indice j appartient à $[\![0, n]\!]$).
3. Expliquer pourquoi, pour tout $x > 0$, il existe un $y_1 \in]0, 1[$ tel que

$$(\delta(f))(x) = f'(x + y_1)$$

4. En déduire que pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un $y_n \in]0, n[$ tel que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x + y_n) \tag{6}$$

On pourra procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ et utiliser les trois questions précédentes.

4.2

On considère dans toute la suite de cette partie un réel α. On suppose que pour tout nombre p premier, p^α est un entier naturel. On se propose de montrer que α est alors un entier naturel.

1. Montrer que pour tout entier k strictement positif, k^α appartient à $\mathbb{N}^*$.
2. Montrer que α est positif ou nul.
3. On considère l'application f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Montrer que α est un entier naturel si et seulement si l'une des dérivées successives de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif.

4.3

On applique la relation (6) à la fonction f_α et à l'entier $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ (où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière). On choisit désormais $x \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'expression
$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j)$$
est un entier relatif.
2. Les notations sont celles de la question 4.1.4 ? Quelle est la limite de l'expression $f_\alpha^{(n)}(x + y_n)$ quand $x \in \mathbb{N}^*$ tend vers $+\infty$?
3. Conclure.