Devoir maison des 5/2 – MP
novembre 2023
avant le 21 novembre 2023

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie I

1. Rappel des propriétés de la trace d'une matrice notée Tr.
   (a) Montrer que Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que : $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
   (c) En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

Dans toute la suite du problème, A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$

2. (a) Justifier l'existence d'une matrice $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $C^{-1}AC = D$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.
   (b) Vérifier alors que l'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(A^k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

Partie II

Soit Q un polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$: $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k$.

On note $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ ses racines complexes, distinctes ou non et on a donc : $Q(X) = b_n \prod\limits_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $T_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^k$ et $T_0 = n$.

L'objectif de cette partie est de calculer les termes de la suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à partir des coefficients du polynôme Q.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel $m \geqslant 1$, on a : $X^m - a^m = (X-a)\left(\sum\limits_{k=0}^{m-1} a^k X^{m-1-k}\right)$.
2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On note Q_i le polynôme défini par : $Q_i(X) = \dfrac{Q(X)}{X - \alpha_i}$.
   Montrer que Q' est une combinaison linéaire des Q_i que l'on déterminera.
3. En remarquant que $Q_i(X) = \dfrac{Q(X) - Q(\alpha_i)}{X - \alpha_i}$, montrer que l'on a :
$$Q_i(X) = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{k=r}^{n} b_k \alpha_i^{k-r} \right) X^{r-1}$$
4. Déduire des questions **2** et **3** que l'on a : $\forall r \in [\![1, n]\!]$, $r b_r = \sum\limits_{j=0}^{n-r} b_{r+j} T_j$.

5. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Exprimer T_k en fonction de $T_0, \cdots, T_{k-1}$ et des coefficients du polynôme Q.
6. Soit $k \geqslant n$.
   (a) Montrer par ailleurs que l'on a : $\sum\limits_{j=0}^{n} b_j T_{k-n+j} = 0$.
   (b) Exprimer alors T_k à l'aide de $T_{k-n}, T_{k-n+1}, \cdots, T_{k-1}$ et des coefficients du polynôme Q.
7. Conclure.

Partie III

On rappelle que A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ et on pose :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

et pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $S_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.
On considère alors le système linéaire (Σ) dont les inconnues sont $u_1, \cdots, u_n$ et défini par les n équations suivantes :

$$S_1 + u_1 = 0 \text{ et } \forall k \in [\![2, n]\!], \quad S_k + u_1 S_{k-1} + u_2 S_{k-2} + \cdots + u_{k-1} S_1 + k u_k = 0$$

1. Démontrer que le système (Σ) possède une unique solution dans $\mathbb{R}^n$.
2. Vérifier que $u_1 = a_{n-1}$ et que $u_2 = a_{n-2}$. On pourra utiliser les relations coefficients racines d'un polynôme.
3. En utilisant la partie **II**, montrer que $(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0)$ est solution du système (Σ).
4. En déduire que l'on a : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $u_k = a_{n-k}$.

Partie IV

1. Justifier que $P(A) = O_n$.
2. Prouver l'équivalence : A inversible $\Longleftrightarrow a_0 \neq 0$.
3. Montrer que la matrice A^{-1}, si elle existe, s'écrit comme un polynôme en A.
4. On considère la suite $(B_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la suite $(d_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ de réels définies par :

$$\begin{cases} d_1 = -\operatorname{Tr}(A), \ B_1 = A + d_1 I_n \\ \forall k \in [\![2, n]\!], \ d_k = -\dfrac{1}{k}\operatorname{Tr}(B_{k-1}A) \text{ et } B_k = B_{k-1}A + d_k I_n \end{cases}$$

   (a) Établir que l'on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ B_k = A^k + \sum_{i=1}^{k} d_i A^{k-i}$$

   (b) Montrer que l'on a aussi :

$$\forall k \in [\![2, n]\!], \ d_k = -\frac{1}{k}\left(\operatorname{Tr}(A^k) + \sum_{i=1}^{k-1} d_i \operatorname{Tr}(A^{k-i})\right)$$

   (c)
      i. Prouver alors que : $\forall k \in [\![1, n]\!], \ d_k = a_{n-k}$

ii. Déterminer B_{n-1}.

iii. Déterminer B_n. Le résultat était-il prévisible ?

5. Aplication : On prend $n = 4$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Utiliser la méthode étudiée au-dessus pour déterminer le polynôme caractéristique de A et la matrice A^{-1}.

   On pourra utiliser que : $B_2 A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. Le listing ci-dessous fournit 5 fonctions écrites en langage Python. Les matrices seront notées comme des listes de listes.

```
def fonction1(A,B) :
    n=len(A)
    C=[]
    for i in range(n):
        L=[]
        for j in range(n):
            s=0
            for k in range(n):
                s+=A[i][k]*B[k][j]
            L.append(s)
        C.append(L)
    return C

def fonction2(x,n):
    A=[]
    for i in range(n):
        L=[0]*n
        L[i]=x
        A.append(L)
    return A

def fonction3(A):
    n=len(A)
    S=0
    for i in range(n):
        S+=A[i][i]
    return S

def fonction4(A,x):
    n=len(A)
    B=[]
    for i in range(n):
        L=[]
        for j in range(n):
            L.append(A[i][j]*x)
        B.append(L)
    return B

def fonction5(A,B):
    n=len(A)
    C=[]
    for i in range(n):
        L=[]
        for j in range(n):
            L.append(A[i][j]+B[i][j])
        C.append(L)
    return C
```

   (a) Déterminer les types d'arguments pris par chaque fonction et le résultat qu'elles retournent.

   (b) Compléter le programme ci-dessous permettant d'afficher les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A.

```
d=[1]
A=[[1,0,-1,1],[0,0,0,2],[-1,0,-1,0],[1,2,0,1]]
n=len(A)
#
# Compl\'eter le programme
#
print("Les coefficients du polyn\^ome caract\'eristique, dans l'ordre d\'ecroissants des puissances sont :",d)
```