**Devoir des 5/2 – janvier 2025**
**MP**
*à rendre avant le 28 janvier 2025*

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou $\boxed{\text{encadrer}}$ les résultats.*
*Bon travail !*

---

## 1 Nombre de points fixes d'une permutation

Soit $n$ un entier naturel non nul. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'intervalle entier $[\![1,n]\!] = \{1,2,\ldots,n\}$, c'est-à-dire des bijections de $[\![1,n]\!]$ vers lui-même. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est une permutation, on appelle **point fixe** de $\sigma$ tout entier $i \in [\![1,n]\!]$ tel que : $\sigma(i) = i$.
Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est appelée un **dérangement** si elle n'a aucun point fixe. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $d_n$ le nombre de dérangements de l'intervalle entier $[\![1,n]\!]$. Par convention, on pose : $d_0 = 1$.
On munit l'ensemble fini $\mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme notée $\mathrm{P}_n$. Sur l'espace probabilisé fini $(\mathcal{S}_n, \mathrm{P}_n)$, on définit la variable aléatoire $X_n$ telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $X_n(\sigma)$ est le nombre de points fixes de la permutation $\sigma$.
On introduit enfin la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{d_n}{n!} x^n$, dont le rayon de convergence est noté $R$, et dont la somme sur l'intervalle de convergence $]-R,R[$ est notée $s$ :

$$\forall x \in ]-R,R[, \quad s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n.$$

1. Rappeler le cardinal de $\mathcal{S}_n$. En déduire que $R \geqslant 1$.
2. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, montrer que le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement $k$ points fixes est $\displaystyle\binom{n}{k} d_{n-k}$.
3. Montrer que :
$$\forall x \in ]-1,1[, \quad s(x)e^x = \frac{1}{1-x}.$$
En déduire que $R = 1$.
4. En partant de la relation $(1-x)s(x) = e^{-x}$ pour tout $x \in ]-1,1[$, exprimer $\dfrac{d_n}{n!}$ pour $n$ entier naturel, sous la forme d'une somme.
5. Montrer que la loi de la variable aléatoire $X_n$ est donnée par :
$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathrm{P}_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$
6. Sur l'espace probabilisé fini $(\mathcal{S}_n, \mathrm{P}_n)$, on définit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire $U_i$ telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on ait $U_i(\sigma) = 1$ si $\sigma(i) = i$, et $U_i(\sigma) = 0$ sinon.
Montrer que $U_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$.
Montrer que, si $i \neq j$, la variable $U_iU_j$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
7. Exprimer $X_n$ à l'aide des $U_i$ pour $i \in [\![1,n]\!]$. En déduire l'espérance $\mathrm{E}(X_n)$ et la variance $\mathrm{V}(X_n)$.

8. Dans cette question, on fixe un entier naturel $k$. Déterminer :

$$y_k = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(X_n = k).$$

Soit $Y$ une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(Y = k) = y_k.$$

Reconnaître la loi de $Y$.

9. On note $G_{X_n}$ et $G_Y$ les fonctions génératrices respectives des variables $X_n$ et $Y$ de la question précédente. Exprimer $G_{X_n}(s)$ sous forme de somme, pour $s$ réel, et vérifier que :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(s) = G_Y(s).$$

## 2 Convergence en variation totale

Dans la suite du problème, on appelle **distribution (de probabilités) sur** $\mathbb{N}$ toute application $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x(k) = 1.$$

On note $\mathcal{D}_\mathbb{N}$ l'ensemble des distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$.
Si $x$ et $y$ sont deux distributions sur $\mathbb{N}$, on définit la **distance en variation totale** entre $x$ et $y$ par :

$$\mathrm{d}_{VT}(x, y) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} |x(k) - y(k)|.$$

10. Soient $x$, $y$, $z$ trois distributions sur $\mathbb{N}$. Prouver les propriétés :

$$\begin{array}{l} 0 \leqslant \mathrm{d}_{VT}(x, y) \leqslant 1\,; \\ \mathrm{d}_{VT}(x, y) = 0 \iff x = y\,; \\ \mathrm{d}_{VT}(y, x) = \mathrm{d}_{VT}(x, y)\ ; \\ \mathrm{d}_{VT}(x, z) \leqslant \mathrm{d}_{VT}(x, y) + \mathrm{d}_{VT}(y, z)\,. \end{array}$$

Si $X$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, on note $p_X$ la distribution de probabilités de $X$. Ainsi, $p_X$ est l'application de $X$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_X(k) = \mathrm{P}(X = k).$$

Il est clair que $p_X \in \mathcal{D}_\mathbb{N}$.
En particulier, si $\lambda$ est un réel strictement positif, on appelle **distribution de Poisson de paramètre** $\lambda$ l'application $\pi_\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \pi_\lambda(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

11. Soient $X$ et $Y$ deux variables de Bernoulli, ayant respectivement pour paramètres $\lambda \in ]0, 1[$ et $\mu \in ]0, 1[$. Calculer $\mathrm{d}_{VT}(p_X, p_Y)$.

12. Soit $X$ une variable de Bernoulli de paramètre $\lambda \in ]0, 1[$. Montrer que :

$$\mathrm{d}_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = \lambda\left(1 - e^{-\lambda}\right).$$

En déduire que :

$$\mathrm{d}_{VT}(p_X, \pi_\lambda) \leqslant \lambda^2.$$

On considère de nouveau les variables aléatoires $X_n$ introduites dans la partie 1. Les questions 8 et 9 semblent montrer une certaine « convergence » des lois des variables $X_n$ vers la loi de Poisson de paramètre 1. Le but de la fin de cette partie est de montrer que :

$$\mathrm{d}_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et que cette convergence est assez rapide.

13. Vérifier la relation, pour tout $n$ entier naturel non nul :

$$2\mathrm{d}_{VT}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

14. Pour tout $n$ entier naturel, on pose $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Prouver la majoration :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k}.$$

En déduire un équivalent simple de $r_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

15. En continuant de majorer le second membre de l'égalité de la question 13, établir l'estimation :

$$\mathrm{d}_{VT}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right).$$

*On pourra faire intervenir les coefficients binomiaux.*

## 3 Autres estimations de distances en variation totale

Si $x$ et $y$ sont deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$, on définit l'application $x * y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (x * y)(k) = \sum_{i=0}^{k} x(i)y(k-i) = \sum_{i+j=k} x(i)y(j).$$

16. Montrer que $x * y$ est une distribution sur $\mathbb{N}$.

17. Soient $X$ et $Y$ des variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Prouver la relation :

$$p_{X+Y} = p_X * p_Y.$$

18. Soit $(x, y, u, v) \in (\mathcal{D}_{\mathbb{N}})^4$. Montrer que, pour tout $k$ entier naturel :

$$|(x*y)(k) - (u*v)(k)| \leqslant \sum_{i+j=k} y(j)|x(i) - u(i)| + \sum_{i+j=k} u(i)|y(j) - v(j)|.$$

19. Avec les notations de la question précédente, établir l'inégalité :

$$\mathrm{d}_{VT}(x*y, u*v) \leqslant \mathrm{d}_{VT}(x, u) + \mathrm{d}_{VT}(y, v).$$

20. Soit $U$ une variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\lambda \in ]0, 1[$. Prouver :

$$\mathrm{d}_{VT}\left(p_U, \pi_{n\lambda}\right) \leqslant n\lambda^2.$$

21. Soit $\alpha$ un réel strictement positif. Pour tout entier naturel $n$ tel que : $n > \lfloor \alpha \rfloor$, on note $B_n$ une variable binomiale de paramètres $n$ et $\dfrac{\alpha}{n}$. Pour tout $k$ entier naturel, déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(B_n = k).$$

*On pourra utiliser la question précédente.*

22. Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels strictement positifs. En utilisant les résultats et les méthodes qui précèdent, montrer que :

$$\mathrm{d}_{VT}\left(\pi_\alpha, \pi_\beta\right) \leqslant |\beta - \alpha|.$$