Devoir maison des 5/2 – MP
janvier 2024
avant le mardi 30 janvier 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !

Dans tout le problème I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, qui pourra être $[0,1]$ ou $[0,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$. On dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une densité (de probabilité) sur I si elle est **continue** et **positive** sur I, intégrable sur I et de masse 1 c'est-à-dire :

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on dira que le moment d'ordre n d'une densité est fini si :

$$x \mapsto x^n f(x) \text{ est intégrable sur } I,$$

et on définit alors le moment d'ordre n par le réel :

$$m_n(f) = \int_I x^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans tout le problème la densité gaussienne est la densité $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{1}$$

I – Quelques exemples

1. On considère $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x) = e^{-x}$. Montrer que g est une densité sur $[0,+\infty[$, que tous ses moments sont finis et calculer $m_n(g)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que tous les moments de la densité gaussienne φ sont finis.
3. Que vaut $m_{2p+1}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$?
4. Calculer $m_{2p}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$.
   On exprimera le résultat sous forme compacte avec des factorielles là où c'est possible.
5. Donner un exemple de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le moment d'ordre 1 n'est pas fini.

Dans ce problème, on va s'intéresser à la question suivante : une densité est-elle déterminée par l'ensemble de ses moments ? Autrement dit, est-il vrai que

si deux densités f et g ont tous leurs moments finis et
$m_n(f) = m_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f = g$ sur I ?

On va notamment voir que c'est vrai si $I = [0,1]$ (partie III), mais faux si $I = [0,+\infty[$ (partie V) ou $I = \mathbb{R}$.

II – Théorème de Stone-Weierstrass

On rappelle que $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial « k parmi n ».

6. Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

7. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

8. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.$$

9. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant Cn,$$

pour une constante $C > 0$ à préciser.

On se donne maintenant $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$,

$$|x-y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pour $x \in [0,1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en :

$$X = \left\{ k \in \{0,1,\ldots,n\} \mid \left| x - \frac{k}{n} \right| < \alpha \right\} \text{ et } Y = \left\{ k \in \{0,1,\ldots,n\} \mid \left| x - \frac{k}{n} \right| \geqslant \alpha \right\}.$$

10. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

11. En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que :

$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

On a donc démontré le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

III – Le problème des moments sur $[0,1]$

On considère ici deux densités f et g sur $I = [0,1]$ et on suppose donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m_n(f) = m_n(g).$$

12. Montrer que, pour toute fonction polynomiale P, on a :

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))P(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

On sait par la partie II qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $f - g$ sur $[0,1]$.

13. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

14. Montrer alors que $f=g$ sur $[0,1]$.

IV – Transformée de Fourier de la densité gaussienne

Pour tout $\xi\in\mathbb{R}$, on pose :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}t\xi}\varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

où φ est définie en (1).

15. Justifier que $\hat{\varphi}$ est correctement définie et continue sur $\mathbb{R}$.
16. Justifier que $\hat{\varphi}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\xi\in\mathbb{R},\quad \hat{\varphi}'(\xi) = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}t\xi}te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

17. Montrer que $\hat{\varphi}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.
18. Montrer que $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ pour tout $\xi\in\mathbb{R}$. Dans la suite et si besoin, on admettra que ceci reste valable pour tout $\xi\in\mathbb{C}$.

V – Le problème des moments sur $[0,+\infty[$

Dans cette partie on considère $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in[0,+\infty[,\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} & \text{pour } x>0,\\ 0 & \text{pour } x=0.\end{cases}$$

19. Montrer que f est bien une densité sur $[0,+\infty[$. On admettra que tous ses moments sont finis.

Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n f(x)\sin(2\pi\ln(x))\,\mathrm{d}x.$$

20. Montrer que :

$$I_n = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{i(2\pi-in)u}e^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u\right),$$

où $\mathrm{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du complexe z.

21. À l'aide de la partie IV, en déduire que $I_n=0$.

Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, on pose :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad g_\alpha(x) = \begin{cases} f(x)(1+\alpha\sin(2\pi\ln(x))) & \text{pour } x>0,\\ 0 & \text{pour } x=0.\end{cases}$$

22. Déterminer une infinité non dénombrable de α pour lesquels f et g_α sont deux densités sur $[0,+\infty[$, distinctes et $m_n(g_\alpha)=m_n(f)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.