

## Devoir des 5/2 – décembre 2024

MP

à rendre avant le 10 décembre 2024



---

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.

Bon travail!

---

## Utilisation des polynômes de Tchebychev en analyse

On note  $E$  l'ensemble des applications continues de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On désigne par  $E_n$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  de degré inférieur ou égal à  $n$ , où  $n$  est un entier naturel. On pourra confondre les expressions *polynôme* et *fonction polynomiale*.

Si  $f$  est un élément de  $E$ , on pose  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$ .

Les parties II et III sont indépendantes et utilisent les résultats de la partie I.

### Polynômes de Tchebychev

Dans toute cette partie,  $n$  désigne un entier naturel.

#### 1. Existence et unicité

(a) Déterminer un polynôme  $T$  à coefficients réels de degré  $n$  vérifiant la propriété

$$(\star) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, T(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

On pourra remarquer que  $\cos(n\theta)$  est la partie réelle de  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ .

(b) Vérifier qu'un polynôme vérifiant  $(\star)$  est unique. On l'appelle le polynôme de Tchebychev d'indice  $n$ , on le note  $T_n$ . On définit alors une fonction polynomiale sur  $[-1, 1]$  par

$$\forall x \in [-1, 1], T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

2. (a) Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

On pourra calculer  $T_{n+2}(x) + T_n(x)$ .

(b) Calculer  $T_0, T_1, T_2$  et  $T_3$ .

(c) Donner le coefficient dominant de  $T_n$ .

#### 3. Racines et extrema

On suppose  $n$  non nul dans cette question.

(a) Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos \theta_k) \quad \text{où } \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

(b) On pose pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $c_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$ . Calculer  $\|T_n\|_\infty$  puis montrer que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, |T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty$$

et que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k)$$

Les  $n+1$  réels  $c_0, c_1, \dots, c_n$  sont appelés *points de Tchebychev*.

(c) Dessiner le graphe de  $T_3$  et préciser sur le graphe les réels  $c_0, c_1, c_2$  et  $c_3$ .

## Polynômes de Tchebychev et orthogonalité

### Orthogonalité des $T_n$

4. Montrer que pour toute fonction  $h$  de  $E$ , l'application  $t \mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$  est intégrable sur  $] -1, 1[$ .

Pour  $(f, g) \in E^2$ , on pose  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ .

5. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $E$ .

Ceci nous permet de définir une norme euclidienne sur  $E$  : pour tout élément  $h$  de  $E$ , on pose  $\|h\|_2 = \sqrt{\langle h, h \rangle}$ .

6. Calculer  $\langle T_n, T_m \rangle$  selon les valeurs des entiers naturels  $m$  et  $n$ . En déduire pour tout entier naturel  $n$  que la famille  $(T_0, T_1, \dots, T_n)$  est une base orthogonale de  $E_n$ .

### Polynôme de meilleure approximation quadratique

Dans toute la suite de la partie II,  $f$  désignera un élément de  $E$  et  $n$  un entier naturel. On pose

$$d_2(f, E_n) = \inf\{\|f - Q\|_2, Q \in E_n\}$$

Le but de la suite de la partie II est d'exprimer  $\|f\|_2$  en fonction des  $\frac{\langle f, T_k \rangle}{\|T_k\|_2}$ .

7. (a) Énoncer un théorème justifiant l'existence et l'unicité d'un vecteur  $t_n(f)$  dans  $E_n$  tel que  $\|f - t_n(f)\|_2 = d_2(f, E_n)$ .

(b) Exprimer  $t_n(f)$  à l'aide des polynômes de Tchebychev.

On dit que  $t_n(f)$  est le polynôme de meilleure approximation quadratique de  $f$  sur  $E_n$ .

8. Montrer que

$$d_2(f, E_n) = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}}$$

9. (a) En déduire que la série  $\sum \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$  est convergente.

(b) Que pensez-vous de la limite de  $\int_{-1}^1 \frac{f(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

### Convergence en norme quadratique

10. (a) Soit  $h$  un élément de  $E$ . Montrer que  $\|h\|_2 \leq \sqrt{\pi} \|h\|_\infty$ .

(b) Montrer en utilisant un théorème de Weierstrass que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - t_n(f)\|_2 = 0$ .

11. (a) En déduire que  $\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}}$ .

(b) Application : un théorème des moments.

Que peut-on dire d'une fonction  $h$  de  $E$  telle que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\int_{-1}^1 \frac{h(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$  ?

### Polynôme de meilleure approximation au sens de Tchebychev

Dans toute cette partie,  $n$  désigne un entier naturel et  $f$  un élément de  $E$ .

On note  $d_\infty(f, E_n) = \inf\{\|f - Q\|_\infty, Q \in E_n\}$ .

On dit qu'un élément  $P$  de  $E_n$  est un polynôme de meilleure approximation (on notera en abrégé PMA) au sens de Tchebychev d'ordre  $n$  s'il vérifie une des deux conditions équivalentes

(i)  $\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, E_n)$

(ii)  $\forall Q \in E_n, \|f - P\|_\infty \leq \|f - Q\|_\infty$ .

### Existence d'un PMA d'ordre $n$ pour $f$

On pose  $K = \{Q \in E_n, \|f - Q\|_\infty \leq \|f\|_\infty\}$ .

12. (a) Montrer que  $K$  est une partie non vide fermée et bornée de  $E_n$ .  
(b) En déduire que  $K$  est une partie compacte non vide de  $E_n$ .
13. (a) Montrer que  $d_\infty(f, E_n) = d_\infty(f, K)$ .  
(b) En déduire qu'il existe un élément  $P$  de  $E_n$  tel que  $\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, E_n)$ .  $P$  est donc un PMA d'ordre  $n$  de  $f$ .

### Condition suffisante pour être un PMA

Soit  $h$  un élément de  $E$ . On dit que  $h$  équioscille sur  $k+1$  points s'il existe  $k+1$  réels  $x_0 < x_1 < \dots < x_k$  de l'intervalle  $[-1, 1]$  tels que

$$\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, |h(x_i)| = \|h\|_\infty$$

et

$$\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, h(x_{i+1}) = -h(x_i)$$

On dit que les extrema sont alternés.

#### 14. Exemples.

- (a) Dessiner le graphe d'une fonction  $\varphi$  de  $E$  telle que  $\|\varphi\|_\infty = \frac{1}{2}$  et  $\varphi$  équioscille sur 4 points. On ne cherchera pas à expliciter une telle fonction.
- (b) Montrer que le polynôme  $T_{n+1}$  de Tchebychev d'indice  $n+1$  équioscille sur  $n+2$  points.

Le but de la question 15 est de montrer le résultat suivant :

Si  $P$  est un élément de  $E_n$  tel que  $f - P$  équioscille sur  $n+2$  points, alors  $P$  est un PMA d'ordre  $n$  de  $f$ .

15. Soit  $P$  un élément de  $E_n$  tel que  $f - P$  équioscille sur  $n+2$  points que l'on note  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$ . Soit  $Q$  un élément de  $E_n$  tel que  $\|f - Q\|_\infty < \|f - P\|_\infty$ .
  - (a) Soit  $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ . Montrer que si  $f(x_i) - P(x_i) > 0$ , alors  $Q(x_i) - P(x_i) > 0$ .  
On obtiendrait de même que, si  $f(x_i) - P(x_i) < 0$ , alors  $Q(x_i) - P(x_i) < 0$ .
  - (b) En déduire que  $P = Q$  et conclure.

### Détermination de PMA

16. Dans cette question, on pose  $f(x) = x^{n+1}$  et  $q_n(x) = x^{n+2} - 2^{-n}T_{n+1}(x)$  pour  $x \in [-1, 1]$ .  
Montrer que  $q_n$  est un PMA d'ordre  $n$  de  $f$ .
17. En déduire que pour tout polynôme  $P$  unitaire de degré  $n+1$ ,  $2^{-n}\|T_{n+1}\|_\infty \leq \|P\|_\infty$ .
18. (a) Dans cette question,  $f$  est un polynôme de degré  $n+1$ . Déterminer un PMA d'ordre  $n$  de  $f$ .  
(b) Application : déterminer un PMA d'ordre 2 de  $f(x) = 5x^3 + 2x - 3$ .

REMARQUE. On peut montrer l'unicité du PMA. Il n'existe pas de formule générale qui donne l'expression du PMA d'une fonction quelconque. On peut cependant utiliser un algorithme (de Remes) qui fournit une suite de polynômes qui converge vers le PMA.