Devoir maison n° 9
MP
pour mardi 10 décembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
↯ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ↯ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✍

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.
Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.
4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.
   (a) Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?
   (b) Soit φ la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2 – ↯

On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel euclidien des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni du produit scalaire canonique défini pour A et B matrices par : $(A|B) = \mathrm{Tr}(A^\top B)$.

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, que vaut $(A|A')$?
2. On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel formé des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner, pour le produit scalaire canonique, une base orthonormée de $\mathcal{T}$ et de son orthogonal $\mathcal{T}^\perp$.
3. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer le projeté orthogonal de la matrice A sur $\mathcal{T}$, ainsi que la distance de la matrice A à $\mathcal{T}$.

Exercice 3 – ↯

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $2n$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $e_k = X^k$ et $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_{2n})$ la base canonique de E.
Pour tout couple (P, Q) de E^2, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
Soit L l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E,\ L(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que L est une forme linéaire sur E.
2. Déterminer $L(e_k)$ pour $k \in [\![0, 2n]\!]$.
3. Déterminer la dimension de $\ker(L)$.
4. Prouver qu'il existe une base $\mathcal{U}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\ker(L)$, dont le premier vecteur est e_1.
5. Montrer que :
   (i) $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\ker(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux
   (ii) $E = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus \ker(L)$
6. Soit λ réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall P \in E,\ T_\lambda(P) = P + \lambda L(P)X$$

   (a) *(facultatif)* Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E.
   (b) Soit $P \in E$. Calculer $(L \circ T_\lambda)(P)$.
   (c) Déterminer la matrice de T_λ dans une base de E adaptée à la décomposition obtenue aux questions 4. et 5.
   (d) Déterminer les valeurs propres de T_λ.
   (e) L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable ?
   (f) Justifier que T_λ est un automorphisme de E.
   (g) Pour α et β réels, préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.
   (h) Déterminer T_λ^{-1}.
