Devoir maison n° 9
MP
pour mardi 12 décembre 2023

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !

Exercice 1

Partie A.

Soit a un réel positif ou nul. On considère les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$a_0 = a,\ b_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :
   (a) $a_n \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$,
   (b) $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a
$$0 \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$$
3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a
$$(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \leqslant a_n - b_n \qquad \text{puis} \qquad |a_n - b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}|1 - a|$$
4. En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite.

Partie B.

Désormais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent les suites de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ en posant

$$a_0(x) = x,\ b_0(x) = 1,\ a_{n+1}(x) = \frac{a_n(x) + b_n(x)}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1}(x) = \sqrt{a_n(x)b_n(x)}$$

1. Déduire de la partie A que les suites (a_n) et (b_n) convergent simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f.
2. (a) Déterminer $f(0)$ et $f(1)$.
   (b) Montrer que pour tout x on a $\sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1+x}{2}$.
3. Soit $A > 0$ un réel. Montrer que les suites de fonctions $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur $[0, A]$ vers f. (On pourra utiliser la question $A.3$).
4. En déduire que la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2 – au choix

Exercice 2 – A – plus facile On note $I =]0, +\infty[$ et on définit pour n entier naturel non nul et pour $x \in I$, $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, les fonctions f_n sont intégrables sur I et calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Que vaut alors la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$?
2. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur I. Déterminer sa fonction somme S et démontrer que S est intégrable sur I. Que vaut alors $\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$?
3. *Pour les 5/2 uniquement.* Donner, sans aucun calcul, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x\right)$.

Exercice 2 – B – plus difficile
Soit $I = [a, b]$ un segment inclus dans $]0, 1[$. On considère $f : x \mapsto 2x(1-x)$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n = f \circ f \circ \cdots \circ f \quad \text{(composée } n \text{ fois)}$$

Notons que $f_0 = \mathrm{Id}$.
Étudier la convergence simple puis uniforme sur I de la suite de fonctions (f_n).

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on précisera. La convergence est-elle uniforme ?
2. Soit $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   (b) Montrer que $(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3}\,\mathrm{d}x$. En déduire un équivalent de u_n.
   (c) Déterminer α_1, α_2, α_3 réels tels que pour entier naturel n,

$$(n+2)(n+1)u_n = \alpha_1(n+2) + \alpha_2 + \alpha_3 \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5}\,\mathrm{d}x$$

   En déduire un développement asymptotique de u_n (à expliciter) de la forme :

$$u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

3. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \int_0^1 x^n g(x)\,\mathrm{d}x$.
   Montrer que pour tout entier naturel non nul k, (v_n) admet un développement asymptotique de la forme :

$$v_n = \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots + \frac{\beta_k}{n^k} + o(\frac{1}{n^k})$$

   Exprimer β_1 et β_2 à l'aide de g.
4. *(Question plus difficile)*
   Soit h une fonction continue sur $[0, 1]$. Montrer que la suite $\left(n\int_0^1 x^n h(x)\,\mathrm{d}x\right)$ admet une limite finie et exprimer cette limite en fonction de h.