Devoir maison n° 8
MP
pour mardi 3 décembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
$\not\ell$: problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices $\not\ell$ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✍

1. VRAI OU FAUX ?
   Exceptionnellement, on ne demande pas de justification.
   f_n et f désignent des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   (a) Si (f_n) est une suite d'applications de classe C^1 qui converge uniformément vers f sur l'intervalle I, alors f est de classe C^1 sur I. Vrai ou faux ?
   (b) Si (f_n) est une suite d'applications continues qui converge uniformément vers f sur I et si $a \in I$, alors f est continue en a. Vrai ou faux ?
   (c) La fonction exponentielle peut être approchée uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ par des polynômes. Vrai ou faux ?
   (d) Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact de I, alors elle converge uniformément sur I. Vrai ou faux ?
   (e) Si pour tout entier n, f_n est continue sur I et si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, alors $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur I. Vrai ou faux ?
2. $f_n : x \mapsto \sin\left(x + \frac{1}{n}\right)$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?
3. $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{n}$. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
4. $f_n : x \mapsto \frac{nx}{1 + n^2x^2}$.
   Étudier la convergence simple et uniforme sur $]0, +\infty[$ de la suite de fonctions (f_n).
5. $f_n : x \mapsto x^{n+1} \ln x$.
   Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série $\sum f_n$ sur $]0, 1]$.

Exercice 2 – $\lightning$

Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie I

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Dans les deux premières questions on supposera, pour simplifier les démonstrations, que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I.

1. (a) Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I.

   (b) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I.

2. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

   On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.

3. On pose pour $x \in [0;1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\dfrac{x^2+n}{n^2} \right)$.

   Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0;1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0;1]$.

4. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I, a-t-on nécessairement $\sum f_n$ qui converge uniformément sur I ?

   On attend une réponse détaillée et on pourra utiliser une série usuelle.

Partie II

Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0;1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n (1-x)$.

5. Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur I.

6. (a) Calculer pour $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$.

   (b) Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\alpha_n}{n}$ converge.

7. (a) Calculer pour tout $x \in I$, $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x^k$.

   (b) Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I.

   On pourra observer que pour $k \geqslant n+1, \alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$.

   (c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

8. Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ telle que :

   (a) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I.

   (b) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

   (c) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.

9. Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I.