Devoir maison n° 8
MP
pour mardi 5 décembre 2023

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !

Exercices facultatifs

Exercice 1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$ et soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M - \mathrm{Tr}(M)A$.
À quelles conditions sur A l'application f est-elle bijective ?

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit l'ensemble $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^n = 0\}$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{N}$.

1. Quelles sont les matrices symétriques qui appartiennent à $\mathcal{N}$?
2. En déduire que $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 3

On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.

Partie I – Étude de quelques exemples

1. Justifier que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.
2. On donne deux matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.
Ont-elles le même polynôme minimal ? Sont-elles semblables ?
3. On donne deux matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Établir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes :
   — *Première méthode* : en utilisant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A et en cherchant, par simple permutation des vecteurs, une nouvelle base de E.

— *Deuxième méthode* : en prouvant que le polynôme $X^3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α, β et γ.

4. Démontrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 & a_1 \\ . & . & . & . & a_2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On pourra utiliser l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice A.

5. *Application* : soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme de E de rang 1 vérifiant $u \circ u \neq 0$, démontrer que u est diagonalisable.
6. Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.
7. On donne une matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α, β sont deux nombres complexes non nuls, différents et non opposés.
   Déterminer le rang de la matrice A et en déduire que 0 est valeur propre de A.
   Justifier (sans calculer le polynôme caractéristique de la matrice A) que $2(\alpha + \beta)$ et $2(\alpha - \beta)$ sont aussi valeurs propres de A.
   Préciser une base de vecteurs propres de A.
8. Démontrer que quels que soient les réels non nuls a, b et le réel λ, les matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

Partie II – Démonstration d'un résultat

On se propose de démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $B = P^{-1}AP$. Écrivons $P = R + \mathrm{i}S$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

1. Montrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.
2. Justifier que la fonction $x \mapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $Q = R + xS$ soit inversible.
3. Conclure que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. *Application* : démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie III

On s'intéresse dans cette partie à la proposition $\mathcal{P}_n$: « Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ».

1. En étudiant les différentes valeurs possibles pour le polynôme caractéristique et le polynôme minimal, démontrer que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = 2$. On admet qu'elle est vraie également pour $n = 3$.
2. Démontrer que la proposition $\mathcal{P}_n$ est fausse pour $n = 4$. On pourra fournir deux matrices composées uniquement de 0 et de 1.