Devoir maison n$^{\text{o}}$ 7
MP
pour mardi 26 novembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
ϟ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ϟ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✍

On considère l'équation aux dérivées partielles, d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + y \qquad (E)$$

1. En effectuant le changement de variables $\begin{cases} x &= u \\ y &= \frac{u^2}{2} + v \end{cases}$, résoudre (E).
2. Déterminer la solution vérifiant $f(0, y) = y$ pour tout réel y.

Exercice 2 – ✍

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \dfrac{y^4}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$

1. Démontrer que la fonction f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ que l'on déterminera.
2. Démontrer que la fonction f est différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 3 – ϟ

Pour n entier naturel et t réel, on pose

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} e^{-ikt}$$

1. Vérifier la relation $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$ pour tout n entier naturel.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et t réel non multiple entier de 2π, prouver que

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

3. Soit $h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que l'intégrale

$$I_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} h(u)\sin(\alpha u)\,\mathrm{d}u$$

tend vers 0 lorsque le réel α tend vers $+\infty$.

On considère maintenant une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodique. Pour tout k entier relatif, on pose

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$$

4. Pour n entier naturel et t réel, prouver la relation

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{\mathrm{i}kt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)D_n(u)\,\mathrm{d}u$$

5. En déduire que

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{\mathrm{i}kt} - g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_t(u)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)\,\mathrm{d}u$$

où h_t est une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$ que l'on explicitera.

On admettra que cette fonction h_t est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[-\pi, \pi]$.

6. À l'aide d'une double intégration par parties, montrer que

$$c_n(g) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } c_{-n}(g) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

7. Prouver la relation

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g)e^{\mathrm{i}nt} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g)e^{-\mathrm{i}nt}$$
