Devoir maison n° 7
MP
pour mardi 21 novembre 2023

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail ! Pour ce devoir, il est demandé de faire l'exercice 2 et de choisir un des deux exercices 1.

Exercice 1 au choix

exercice de type e3a-CCINP

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, F un sous-espace de E et G un groupe fini d'automorphismes linéaires de E, de cardinal m, tel que F soit stable par tout élément g de G.
Le produit $u \circ v$ de deux endomorphismes de E sera noté plus simplement uv. À tout endomorphisme u de E, on associe u^+ défini par :

$$u^+ = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u g$$

1. Montrer que u^+ est un endomorphisme de E commutant avec tout élément h de G.
2. Calculer $(u^+)^+$.
3. Calculer la trace de u^+ en fonction de celle de u.
4. Soit p un projecteur de E d'image F. Montrer que F est inclus dans l'image de p^+.
5. Montrer que, pour tous g et h de G, on a $g^{-1}pgh^{-1}ph = h^{-1}ph$.
6. Montrer que p^+ est un projecteur.
7. Comparer les images de p et de p^+.
8. Montrer que le noyau de p^+ est un supplémentaire de F stable par tout élément g de G.
9. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E stable par tout g de G admet un supplémentaire stable par tout g de G.

exercice de type Centrale

On dit qu'un anneau A est régulier quand pour tout x appartenant à A, il existe un u appartenant à A tel que $xux = x$.

1. (a) L'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est-il régulier ?
   (b) Un corps est-il un anneau régulier ?
   (c) Soit E un espace de dimension finie. Montrer que $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau régulier. On pourra pour cela utiliser un supplémentaire du noyau d'un élément de $\mathscr{L}(E)$.
2. Soit A la matrice ayant ses coefficients $a_{i,i+1}$ égaux à 1, les autres coefficients étant nuls. Exhiber U telle que $AUA = A$.
3. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau régulier si et seulement s'il n'existe pas d'entier $a \geqslant 2$ tel que a^2 divise n. *Indications :*
   — Pour le sens direct, dans un raisonnement par l'absurde, on considèrera $\overline{ab}$ où $b = \frac{n}{a^2}$.
   — Pour le sens indirect, pour $x = \overline{a}$, b produit des diviseurs premiers de n qui sont premiers avec a, on posera $c = \frac{n}{b} \in \mathbb{N}$ et on montrera que

   $$u = \overline{d} \qquad \text{où } d = a^{\varphi(b)-1}$$

   vérifie $xux = x$.

Exercice 2

Dans cet exercice, on désigne par p un nombre entier naturel non nul et par $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à p, et on identifie polynôme et fonction polynôme.

1. **Étude d'un endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_p[X]$**
   On associe à toute fonction polynôme P la fonction $\widehat{P}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\widehat{P}(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{si } x \neq 1 \qquad \text{et} \qquad \widehat{P}(1) = P(1)$$

   (a) Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$. Montrer que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction polynôme, de degré inférieur ou égal à $p+1$, admettant 1 pour racine.

   (b) Avec les notations de la question précédente, montrer que $F(x) \underset{1}{=} (x-1)P(1) + o(x-1)$. Qu'en déduit-on pour la fonction $\widehat{P}$ en 1 ?

   (c) Soit $P \neq 0$. Montrer que la fonction $\widehat{P}$ est une fonction polynôme de même degré que P.
   Comme $\widehat{0} = 0$*, on a* $\deg(\widehat{P}) = \deg(P)$ *pour tout* $P \in \mathbb{R}_p[X]$.

   (d) On considère l'application Φ associant à toute fonction polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_p[X]$ la fonction polynôme $\widehat{P}$ définie ci-dessus.
   Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$. Φ est-il injectif ? surjectif ?

   (e) Déterminer les images par Φ des fonctions polynômes $e_k \ : \ x \mapsto x^k$ pour $0 \leqslant k \leqslant p$. En déduire que la matrice M de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots & & 1/(p+1) \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & & & 1/(p+1) \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/4 & & & \\ \vdots & & 0 & 1/4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \ddots & \ddots & 1/(p+1) \\ \vdots & & & & & \ddots & 1/(p+1) \\ 0 & 0 & \dots & & & 0 & 1/(p+1) \end{pmatrix}$$

   (f) Quelles sont les valeurs propres de Φ ? Φ est-il diagonalisable ?

2. **Étude des éléments propres de l'endomorphisme Φ**

   (a) Déterminer les vecteurs propres de Φ associés à la valeur propre 1.

   (b) On considère une valeur propre λ de Φ et P fonction polynôme propre associée.
   Montrer que, pour tout nombre réel x : $(1-\lambda)P(x) = \lambda(x-1)P'(x)$.
   Montrer que si $\lambda \neq 1$, 1 est nécessairement racine de P.

   (c) Déterminer les images par Φ des fonctions polynômes $P_k \ : x \mapsto (x-1)^k$ pour $k = 0$ et pour $0 < k \leqslant p$, et montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

   (d) On considère une fonction polynôme P exprimée comme suit dans la base précédente :

$$P = a_0P_0 + a_1P_1 + \ldots + a_pP_p$$

   Montrer que $a_0 = P(1)$.
   Calculer $\Phi(P)$, $(\Phi \circ \Phi)(P)$ puis $\Phi^n(P)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer pour tout nombre réel x la limite de $\Phi^n(P)(x)$ quand n tend vers $+\infty$ et en déduire en particulier que, si $P(X) = X^p$, la limite de $\Phi^n(P)(x)$ quand n tend vers $+\infty$ est égale à 1.

3. **Application à une marche aléatoire**
Un individu se déplace sur les points d'abscisse 0, 1, 2,... p selon les règles suivantes :
   — il est au point d'abscisse p à l'instant 0 ;
   — s'il est au point d'abscisse k ($0 \leqslant k \leqslant p$) à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), il est de façon équiprobable en l'un des $k+1$ points d'abscisses $0, 1, \ldots, k$ à l'instant $n+1$.

Pour tout nombre entier naturel n, on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant l'abscisse du point où se trouve l'individu à l'instant n et par $E(X_n)$, son espérance.

(a) Écrire un programme Python affichant les positions du mobile jusqu'à l'instant n, les entiers naturels n et p étant au choix de l'utilisateur, enregistrés avec les instructions :

```
n = int(input('entrer un instant n'))     et     p = int(input('entrer une position p'))
```

On pourra utiliser la fonction `randint` de la librairie `numpy.random`, qui est telle que `rd.randint(a,b)` renvoie un nombre entier suivant la loi uniforme sur $[\![a, b-1]\!]$.

(b) Soit $k \in [\![0, p]\!]$. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer la probabilité $P(X_{n+1} = k)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0), P(X_n = 1), \ldots, P(X_n = p)$.

(c) En déduire une matrice carrée M telle que $U_{n+1} = MU_n$ où U_n désigne la matrice-colonne dont les éléments sont du haut vers le bas $P(X_n = 0), P(X_n = 1), \ldots, P(X_n = p)$.

(d) Exprimer le produit matriciel $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} M$ en fonction de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix}$.
En multipliant l'égalité $U_{n+1} = M.U_n$ à gauche par la matrice-ligne $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix}$, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$.
Donner alors $E(X_n)$ en fonction de n ainsi que sa limite quand $n \to +\infty$.

(e) Préciser U_0, puis donner U_n en fonction de M et de n.
Expliquer pourquoi les $p+1$ composantes de U_n ont pour limites (de haut en bas) 1, 0, 0, ... , 0 quand n tend vers $+\infty$.
Pour les 5/2 uniquement : Interpréter ce résultat.
