Devoir maison n° 6
MP
pour mardi 19 novembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
↯ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ↯ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✍

Soit l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

1. Exprimer les dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.
2. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$$

   On explicitera les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 et, pour tout entier naturel n, on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.
3. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.
4. Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

   Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.
5. Montrer $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

Exercice 2 – ↯

On définit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right) & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \varphi'(x)$ et démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel non nul p, il existe deux polynômes P_p et Q_p à coefficients réels tels que, pour tout $x \in \left]-\infty, 1\right[$,
$$\varphi^{(p)}(x) = \frac{P_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})} \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)$$
4. En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \varphi^{(p)}(x)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.
5. En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour $p \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de $\varphi^{(p)}(1)$.
