Devoir maison n° 6
MP
pour mardi 14 novembre 2023

Lycée Camille PISSARRO

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !

Exercice 1

E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X)$$

1. *Étude d'un cas particulier.*
   Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à deux et g la restriction de f à F. On désigne par $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de F.
   (a) Montrer que g est un endomorphisme de F.
   (b) Montrer que la matrice A de g relativement à la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1, 3\}$.
   (d) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$$
   (e) Expliciter A^n en fonction de n.

   On revient au cas général.

2. Montrer que f est un endomorphisme de E.
3. Soit B un vecteur propre pour f associé à la valeur propre λ.
   (a) En étudiant la relation $f(B) = \lambda B$, montrer que B est nécessairement de degré 2.
   (b) On suppose que $\lambda = 3$. Montrer que -1 est racine de B.
   Soit k l'ordre de multiplicité de la racine -1 ; il existe donc un polynôme A tel que :
   $$B(X) = (X+1)^k A(X) \quad \text{avec } A(-1) \neq 0$$
   Montrer que $k = 2$ et que A est constant.
   En déduire que $\lambda = 3$ est une valeur propre de f et déterminer les vecteurs propres associés.
   (c) En supposant $\lambda = -1$, étudier de même la multiplicité de la racine 1.
   En déduire que $\lambda = -1$ est valeur propre de f et déterminer les vecteurs propres associés.

(d) On suppose maintenant que $\lambda \neq 3$ et $\lambda \neq -1$.
Montrer que -1 et 1 sont des racines de B.
En déduire une factorisation des polynômes B obtenus, ainsi que la valeur propre associée à B.

Exercice 2

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n un entier naturel, $n \geqslant 1$.
$x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}$ deux à deux distincts.
Pour tout k appartenant à $\{0, 1, \ldots, n\}$, on considère le polynôme P_k défini par :

$$P_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$$

1. Pour k et i éléments de $\{0, 1, \ldots, n\}$, calculer $P_k(x_i)$.
2. Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est un système libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Que peut-on en déduire ?
3. (a) Soit Q un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Démontrer que $Q = \sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$.

   (b) Pour m élément de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on pose : $s_m = \sum_{k=0}^{n} x_k^m P_k(0)$. Calculer s_m.

Les questions 4 et 5 qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre.

4. Dans cette question, Q est un élément de $\mathbb{R}[X]$. On pose $Q_1 = Q - \sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$.

   (a) Démontrer que Q_1 admet au moins $n+1$ racines réelles.

   (b) On pose : $s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} x_k^{n+1} P_k(0)$ et $s_{n+2} = \sum_{k=0}^{n} x_k^{n+2} P_k(0)$.

      i. Déduire de la question 4.*a* que $s_{n+1} = (-1)^n \prod_{k=0}^{n} x_k$.

      ii. Calculer s_{n+2}. Exprimer le résultat en fonction de n, de $\sum_{k=0}^{n} x_k$ et de $\prod_{k=0}^{n} x_k$.

5. Dans cette question, Q est un polynôme unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré égal à n.
   On suppose de plus que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont des entiers relatifs vérifiant $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.
   Pour k élément de $\{0, 1, \ldots, n\}$, on note : $y_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)$.

   (a) Prouver que : $|y_k| \geqslant k!(n-k)!$

   (b) Déduire de la question 3.*a* que : $\sum_{k=0}^{n} \frac{Q(x_k)}{y_k} = 1$.

   (c) On définit M par $M = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |Q(x_k)|$. Démontrer que $M \geqslant \frac{n!}{2^n}$.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$.

1. Démontrer que A et φ_A ont même spectre.

2. Comparer, pour chaque valeur propre, les dimensions des espaces-propres correspondants de A et φ_A.
   Indication : on pourra considérer l'application linéaire Ψ donnée par

$$\Psi : \left(\begin{array}{lcl} (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (X_1, X_2, \ldots, X_n) & \longmapsto & (X_1|X_2|\ldots|X_n) \end{array} \right)$$

   et condidérer la restriction de Ψ à $(E_\lambda)^n$, où $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et E_λ est l'espace propre de A associé à la valeur propre λ.