Devoir maison n° 5 – entraînement personnel
MP
vacances d'octobre 2024

Ancien problème CCINP

Dans tout ce problème, on note :

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$;
- F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout f dans E, on appelle **transformée de Laplace** de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. **Question préliminaire**
   Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.
   Pour tout x dans $[a, +\infty[$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
   On considère les propositions suivantes :
   (i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;
   (ii) F admet une limite finie en $+\infty$.

   Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :
   (a) f est positive sur $[a, +\infty[$.
   (b) f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

Partie I : Exemples et propriétés

2. (a) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
   (b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (c) Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^*_+, \mathbb{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

3. (a) On considère $\mathcal{U} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. Déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.
   (b) Soit $\lambda \geqslant 0$ réel. On considère $h_\lambda : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
   $$h_\lambda(t) = e^{-\lambda t}.$$
   Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.
4. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. On considère $g_n : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^n f(t)$ Montrer que $g_n \in E$.
5. **Transformée de Laplace d'une dérivée**
   Soit f dans E de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que $f' \in E$ et que :
   $$\forall x \in]0, +\infty[, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$

6. **Régularité d'une transformée de Laplace**
   (a) *(5/2 uniquement)* Démontrer que, pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que l'on a : $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 est définie à la question **4**.
   (b) Démontrer que, pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie, f est un élément de E

7. On suppose dans cette question que f est dans F.
   (a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

   (b) **Théorème de la valeur initiale**
   On suppose, de plus, que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}^+$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.
8. **Théorème de la valeur finale**
   On suppose dans cette question que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.
   (a) Démontrer que f appartient à F.
   (b) Soit n un entier naturel. Démontrer que $a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)\,\mathrm{d}x$ où h_n est la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $h_n(x) = e^{-x} f\left(\dfrac{x}{a_n}\right)$.
   (c) En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée, que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.
   (d) Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.
9. Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on pose : $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout x dans $[0,+\infty[$.
   (a) Démontrer que R est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et déterminer R'.
   En déduire que, pour tout $x>0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.
   (b) On fixe $\varepsilon > 0$.
   Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geqslant A$, on ait : $|R(t)| \leqslant \varepsilon$.
   En déduire que, pour tout $x>0$, on a :
   $$|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant x\int_0^A |R(t)|\,\mathrm{d}t + \varepsilon.$$
   (c) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

Partie III : Application

10. **Calcul de l'intégrale de Dirichlet**
   Ici, f est la fonction définie par : $f(0)=1$ et $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ pour $t>0$ réel.
   (a) Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie réelle ℓ en $+\infty$.

(b) En considérant la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que, pour tout $X > 0$, on a :

$$\int_0^X \sin(t)\ e^{-xt}\ \mathrm{d}t = -\ \frac{1}{1+x^2}\left(e^{-xX}(x\sin(X)+\cos(X))-1\right).$$

Démontrer que la fonction $t \longmapsto \sin(t)\ e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Déterminer alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\ e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

(d) Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire ℓ.

Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (la démarche de la preuve étant identique à celle de la question **9**) : lorsque f dans E vérifie : $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to 0} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

On notera que, par rapport à la question **9**, on a remplacé l'hypothèse « f intégrable sur $\mathbb{R}^+$ » par l'hypothèse « $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$ ».
