

Devoir maison n° 5
MP
pour jeudi 16 octobre 2025



La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

POUR CE DEVOIR, IL EST DEMANDÉ DE RENDRE UN, ET UN SEUL, EXERCICE.

Exercice 1 – type e3a

Partie 1

On considère l'ensemble U des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{2} + \frac{u_n}{2}$$

Il est possible de déterminer U par le cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, mais on s'interdit ici d'utiliser ce résultat de cours.

1. Montrer que U est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soient c et d les deux suites appartenant à U telles que $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $d_0 = 0$ et $d_1 = 1$.
 - (a) Montrer que (c, d) est une base de U .
 - (b) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel U ?
3. (a) Montrer qu'il existe deux réels distincts et non nuls ρ et σ que l'on calculera, avec $\rho < 0 < \sigma$, tels que les suites géométriques $(\rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sigma^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à U . On notera r et s les suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = \rho^n$ et $s_n = \sigma^n$.
 - (b) Montrer que (r, s) est une autre base de U .
4. (a) Si v est la suite de U telle que $v_0 = x$, $v_1 = y$, donner en fonction de x et y les composantes de v dans la base (r, s) .
 - (b) En déduire une formule générale de v_n en fonction de n .

Partie 2

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel de dimension finie n appartenant à $\mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et Id_E l'endomorphisme identité de E . On considère f un endomorphisme de E vérifiant la relation $f^2 = \frac{1}{2}(f + \text{Id}_E)$.

1. Prouver que l'endomorphisme f est inversible (= bijectif) et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de Id_E et de f .
2. Justifier que $\ker(f - \text{Id}_E)$ et $\ker(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
3. Montrer que : $E = \ker(f - \text{Id}_E) \oplus \ker(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E)$.

4. Calculer $(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E) \circ (f - \text{Id}_E)$. En déduire que $\ker(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E) = \text{Im}(f - \text{Id}_E)$.
5. Exprimer f^3 et f^4 comme combinaisons linéaires de f et Id_E .
6. Établir par récurrence que pour tout entier naturel n , il existe un couple (a_n, b_n) de réels tel que : $f^n = a_n f + b_n \text{Id}_E$. Déterminer a_0, b_0, a_1 et b_1 . Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour n dans $\mathbb{N}$.
7. Montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_n}{2}$. En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n pour n élément de $\mathbb{N}$.
8. Calculer les limites des suites (a_n) et (b_n) .

Exercice 2 – type CCINP

Notations :

n est un entier naturel fixé, $n \geq 2$.

$\mathcal{F}$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

E est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.

E_n est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n .

Partie I

Si $f \in \mathcal{F}$, on note $\Delta(f)$ et $T(f)$ les fonctions réelles définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : T(f)(x) = f(x+1)$$

On admettra que Δ et T sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

On note $\Delta^0 = T^0 = \text{Id}_{\mathcal{F}}$ (donc, si $f \in \mathcal{F}$, $\Delta^0(f) = T^0(f) = f$), et, si $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$,

$$\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1}, \quad T^j = T^{j-1} \circ T = T \circ T^{j-1}$$

1. (a) i. Soit $P \in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme.
Comparer les degrés de $\Delta(P)$ et de P .
Calculer le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P .
ii. Vérifier que Δ induit un endomorphisme de E_n , noté Δ_n .

$$\Delta_n : \begin{pmatrix} E_n & \longrightarrow & E_n \\ x & \longmapsto & \Delta(x) \end{pmatrix}$$

- (b) i. Déterminer $\ker \Delta_n$.
ii. En déduire le rang de Δ_n .
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions polynômes N_k par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad N_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad N_k(x) = \frac{x(x-1) \cdots (x-k+1)}{k!}$$

- (a) i. Pour $k \geq 1$, exprimer $\Delta(N_k)$ en fonction des polynômes $(N_j)_{j \geq 0}$.
ii. Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$, puis $(\Delta^j(N_k))(0)$.
- (b) i. Montrer que la famille $(N_0, N_1, \dots, N_n)$ est une base de E_n .
ii. Soit $P \in E_n$. P s'écrit $P = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \cdots + a_n N_n$ où $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Exprimer les a_j en fonction des $(\Delta^j(P))(0)$.

3. (a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$. Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$, $(T^k(f))(x)$.
- (b) Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{F}$.
 - i. Expliciter $\Delta^j(f)$ en fonction des $T^k(f)$, $0 \leq k \leq j$. (On pourra remarquer que $\Delta = T - \text{Id}_{\mathcal{F}}$).
 - ii. En déduire que $(\Delta^j(f))(0)$ ne dépend que des valeurs de f aux points $0, 1, \dots, j$: $f(0), f(1), \dots, f(j)$.

Partie II

On se donne une fonction f de $\mathcal{F}$. On cherche les polynômes solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \deg P \leq n \\ \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, P(k) = f(k) \end{cases}$$

On pose $N(x) = \prod_{j=0}^n (x - j) = x(x - 1) \dots (x - n)$.

1. (a) Soit l'application linéaire $\Phi : \begin{matrix} E_n & \rightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(0), \dots, P(n)) \end{matrix}$
Montrer que Φ est un isomorphisme.
- (b) En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution notée P_f .
2. (a) Pour $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, comparer $(\Delta^j(f))(0)$ et $(\Delta^j(P_f))(0)$.
- (b) En déduire l'expression de P_f en fonction des $(\Delta^j(f))(0)$ et des polynômes N_j .
3. Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
On note $M_n = \sup \left\{ |f^{(n+1)}(t)|, \quad t \in [0, n] \right\}$.
- (a) Soit $x \in [0, n]$, non entier. Montrer que :

$$\exists c \in]0, n[\quad / \quad f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} N(x)$$

On pourra poser $\varphi(t) = f(t) - P_f(t) - KN(t)$, où K est tel que $\varphi(x) = 0$, et appliquer judicieusement le théorème de Rolle.

- (b) En déduire :

$$\forall x \in [0, n], \quad |f(x) - P_f(x)| \leq \frac{1}{n+1} M_n$$

Pour cela, on pourra majorer $|N(x)|$ sur chaque intervalle $[j, j+1]$, où $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.