**Devoir maison n° 4**
**MP**
*pour jeudi 9 octobre 2025*

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.*
*Bon travail !*

---

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
↯ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ↯ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

---

## Exercice 1 – ✍

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On note $\theta$ la matrice nulle, et $I$ la matrice identité.

### Partie A

$A$ est une matrice fixée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, différente de $I$ et $\theta$, on considère $f$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vers lui-même définie par

$$f : M \mapsto f(M) = M \times A - A \times M$$

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ? (on ne demande pas de justifier la réponse).
2. Montrer que $f$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Soit $K = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad / \quad A \times M = M \times A\}$.
   Montrer que $K$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$.
4. Montrer que $I$ et $A$ appartiennent à $\ker f$.
5. Montrer que $\ker f$ est stable pour la multiplication des matrices, c'est-à-dire : $M \in \ker f$ et $N \in \ker f \Rightarrow M \times N \in \ker f$.

### Partie B

On pose maintenant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $f(M)$.
2. (a) Montrer par le calcul que $\ker f$ est le sous-espace vectoriel engendré par $I$ et $A$.
   (b) Trouver une base de $\ker f$ et préciser la dimension de $\ker f$ ainsi que le rang de $f$.
3. Déterminer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Soit $N = x.I + y.A$ un élément de $\ker f$, déterminer $N^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Résoudre dans $\ker f$ l'équation : $N^2 = I$.

## Exercice 2 – ⚡

Soit $E$ l'ensemble des suites réelles convergentes. $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \ / \ (u_n) \text{ converge}\}$.
Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires dans $E$.

---

## Exercice 3 – ⚡

On définit par récurrence deux suites $(P_n)$ et $(Q_n)$ de polynômes par $P_1 = X$, $Q_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = P_n + XQ_n$ et $Q_{n+1} = Q_n - XP_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n + \mathrm{i}P_n = (1 + \mathrm{i}X)^n$.
2. Donner une expression simple de $P_n(\tan\theta)$ et de $Q_n(\tan\theta)$.
3. Factoriser $(P_n)$ et $(Q_n)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

---