Devoir maison n° 4
MP
pour mardi 8 octobre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
$\lightning$: problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices $\lightning$ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✍

Les familles suivantes sont-elles sommables ?

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$, α paramètre réel.
2. $u_n = r^{|n|} e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, θ paramètre réel, $r \in [0, 1[$.
3. $u_{i,j} = \dfrac{(-1)^{i+j}}{ij\sqrt{ij}}$, $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
4. $u_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{i^2} & \text{si } i > j \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $(i, j) \in (\mathbb{N})^2$. On pourra constater que $\dfrac{1}{i^2} \underset{i \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}$.

Exercice 2 – ✍

À l'aide d'un produit de Cauchy sur des séries géométriques, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 3 – ✍

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille sommable. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$w_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k u_k$$

1. Montrer que la famille $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille sommable.
2. Donner sa somme en fonction de la somme de la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 4 – ⚡

On rappelle que la somme de la série $\sum \frac{1}{m^2}$ est égale à $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Étant donné un entier $n \geqslant 2$, on introduit sa factorisation en nombre premiers $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}$ où p_1, p_2, …, p_q sont premiers et distincts et r_1, r_2, …,r_q des entiers supérieurs ou égaux à 1.

On définit la *fonction de Möbius* $\mu : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ par $\mu(1) = 1$, puis, si $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q} \geqslant 2$ par :

- si l'un des entiers r_1, r_2, …, r_q est supérieur ou égal à 2, alors $\mu(n) = \mu\left(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}\right) = 0$;
- si $r_1 = r_2 = \ldots = r_q = 1$, alors $\mu(n) = \mu(p_1 p_2 \dots p_q) = (-1)^q$.

On vérifiera donc que : $\mu(1) = 1$, $\mu(2) = -1$, $\mu(3) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = 1$, etc.

1. Une propriété de la fonction de Möbius.
   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des entiers naturels qui divisent n.
   (a) Préciser l'ensemble $\mathcal{D}_1$, puis les ensembles $\mathcal{D}_n$ pour $2 \leqslant n \leqslant 10$.
   En déduire la somme $\sum\limits_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d)$ pour $n = 1$, puis pour $2 \leqslant n \leqslant 10$. Que peut-on conjecturer ?
   (b) En étudiant la forme des diviseurs d de $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}$, établir que les seuls diviseurs d de n pour lesquels on a $\mu(d) \neq 0$ sont $d = 1$ et les entiers du type $d = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}$ où $1 \leqslant k \leqslant q$ et où $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ est une partie à k éléments de $[\![1, q]\!]$, puis en déduire que :
   $$\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d) = 1 + \sum_{k=1}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k .$$
   (c) En déduire la valeur numérique de la somme $\sum\limits_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d)$ pour $n \geqslant 2$.

2. La famille sommable $\left(\dfrac{\mu(d)}{m^2\, d^2}\right)$ pour $(m, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier la convergence absolue de la série de terme général $\dfrac{\mu(d)}{d^2}$ où $d \geqslant 1$.
   (b) Justifier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{\mu(d)}{m^2\, d^2}\right)$ pour $(m, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
   (c) On calcule de deux façons la somme de la famille $\left(\dfrac{\mu(d)}{m^2\, d^2}\right)$ pour $(m, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
   - Établir l'égalité suivante :
   $$\sum_{(m,d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{\mu(d)}{m^2\, d^2} = \frac{\pi^2}{6} \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}.$$
   - En exploitant la partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ formée par les parties
   $$P_n = \{(m, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid md = n\}$$
   où $n \geqslant 1$, établir les égalités suivantes :
   $$\sum_{(m,d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{\mu(d)}{m^2\, d^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d)\right) = 1.$$
   (d) En déduire la somme de la série de terme général $\dfrac{\mu(d)}{d^2}$ pour $d \geqslant 1$.