Devoir maison n° 4
MP
pour le 17 octobre 2023

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On considère un polynôme P de degré n à coefficients réels et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

1. Montrer que la famille $(P, P', \ldots, P^{(n)})$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que les matrices A et $A^\top$ sont inversibles, où :

$$A = \begin{pmatrix} P(a_0) & P(a_1) & P(a_2) & \ldots & P(a_n) \\ P'(a_0) & P'(a_1) & P'(a_2) & & P'(a_n) \\ P''(a_0) & P''(a_1) & P''(a_2) & & P''(a_n) \\ \vdots & & & & \vdots \\ P^{(n)}(a_0) & P^{(n)}(a_1) & P^{(n)}(a_2) & \ldots & P^{(n)}(a_n) \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soient $x_1, \ldots, x_p$ des réels distincts, et $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ des familles quelconques de réels.

1. Montrer que l'application Φ suivante est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2p}$.

$$\Phi : P \mapsto (P(x_1), \ldots, P(x_p), P'(x_1), \ldots, P'(x_p))$$

2. Démontrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ vérifiant, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $P(x_i) = a_i$ et $P'(x_i) = b_i$.

Exercice 3

Pour toutes ces questions, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Définir : « H est un hyperplan de E ».
2. Soit f une forme linéaire de E.
   (a) Rappeler ce que cela signifie.
   (b) Montrer que $\dim \operatorname{Im} f \in \{0, 1\}$.
   (c) Dans le cas où f n'est pas l'application nulle, montrer que son noyau est un hyperplan de E.

3. Soit H un hyperplan de E.
   (a) Montrer que pour a vecteur de E n'appartenant pas à H, on a $\text{Vect} < a > \oplus H = E$.
   (b) Donner (par exemple en définissant f par sa matrice dans une base adaptée à la somme précédente et une base de $\mathbb{K}$) qu'il existe une forme linéaire de noyau égal à H.
4. Quelle caractérisation des hyperplans vient-elle d'être démontrée ?

Exercice 4

On rappelle qu'une application ϕ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est périodique si et seulement si il existe T élément de $\mathbb{R}^*$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x+T) = \phi(x)$. On dit alors que ϕ est T-périodique ou que T est une période de ϕ.

Partie A
Dans cette partie, on établit quelques propriétés des applications périodiques. Soit ϕ une application T-périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ alors ϕ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors ϕ' est T-périodique.
3. On considère l'ensemble suivant

$$P_\phi = \{t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x+t) = \phi(x)\}$$

   Montrer que P_ϕ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Partie B Étude des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Montrer que $G \cap]0, +\infty[$ n'est pas vide.
2. On pose $a = \inf(G \cap]0, +\infty[)$.
   (a) On considère le cas où $a > 0$.
      i. Montrer qu'alors a appartient à G (on pourra faire un raisonnement par l'absurde, en montrant que si a n'appartient pas à G il existe des éléments t_1 et t_2 de G tels que $a < t_2 < t_1 < 2a$ et en déduire une contradiction).
      ii. Établir l'égalité $G = a\mathbb{Z}$.
   (b) *(plus difficile, facultatif)* On considère le cas où $a = 0$. Prouver que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit p un nombre entier supérieur ou égal à 2 et $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un élément de $\mathbb{R}^p$ avec $a_p \neq 0$.
On note $\mathcal{U}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\mathcal{U}_p$ l'ensemble des suites réelles $u \in \mathcal{U}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \cdots + a_p u_n$$

1. Soit H l'application de $\mathcal{U}_p$ dans $\mathbb{R}^p$ qui associe à toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{U}_p$ le p-uplet $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$. Justifier que H est une bijection de $\mathcal{U}_p$ sur $\mathbb{R}^p$.
2. Montrer que $\mathcal{U}_p$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et donner sa dimension.
3. Trouver une base de l'espace vectoriel des suites $u \in \mathcal{U}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+p} = u_n$$