

Devoir maison n° 3

MP

pour jeudi 2 octobre 2025



La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

POUR CE DEVOIR, IL EST DEMANDÉ DE RENDRE UN, ET UN SEUL, DES DEUX EXERCICES.

Exercice 1 – type e3a

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

On se propose d'étudier la série de terme général $a_n = \frac{\sin(n^\alpha)}{n}$, $n \geq 1$.

1. On pose pour tout $t \geq 1$, $\varphi(t) = \frac{\sin(t^\alpha)}{t}$.
 - (a) Justifier que la fonction $t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
 - (b) Justifier que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer φ' .
 - (c) Montrer que l'on a : $\forall t \in [1, +\infty[, |\varphi'(t)| \leq \frac{1 + \alpha t^\alpha}{t^2}$.
 - (d) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\forall t \in [n, n+1], |\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) |t - n|.$$

2. On pose, pour tout $n \geq 1$: $u_n = \int_n^{n+1} \varphi(t) dt$.

Prouver que l'on a : $\forall n \geq 1, |u_n - a_n| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.

3. **Convergence de l'intégrale** $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

(a) Démontrer que $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

(b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer alors que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

4. Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$ converge.

5. En déduire que la série de terme général u_n converge.

6. Prouver que la série de terme général $u_n - a_n$ converge absolument.

7. Déduire des questions précédentes que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

8. **On suppose que la série $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ est convergente.**

(a) Montrer qu'alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente.

(b) Prouver que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$ converge. On procédera comme à la question 3b.

(c) On admet alors, en procédant comme précédemment, que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n^\alpha)}{n}$ est convergente. Conclure sur la nature de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$.

On pourra utiliser la formule de duplication : $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.

Exercice 2 – type CCINP

Dans cet exercice, on désigne par f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, et on étudie en fonction de diverses hypothèses l'intégrale suivante pour tout réel $x > 0$, si elle existe :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt.$$

Partie I : étude de $F(x)$ lorsque f a une limite finie L en $+\infty$

Dans toute cette partie, on suppose que la fonction continue f admet une limite finie L en $+\infty$.

1. Étude d'un cas particulier.

Dans cette question, on donne deux réels p et q et on suppose que la fonction f est définie par :

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = \frac{pt^2 + q}{t^2 + 1}.$$

(a) Établir, pour $x > 0$, qu'il existe des réels a_x et b_x , qu'on exprimera en fonction de x , tels que :

$$\forall t > 0, \quad \frac{f(xt) - f(t)}{t} = (p - q) \left(\frac{a_x t}{x^2 t^2 + 1} - \frac{b_x t}{t^2 + 1} \right).$$

(b) Calculer pour tout réel $A \geq 0$ l'intégrale $\int_0^A \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt$, et en déduire $F(x)$.

(c) Exprimer $L = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ et $f(0)$ à l'aide de p et q , puis $F(x)$ en fonction de $f(0)$, L et $x > 0$.

2. Étude de $F(x)$ pour $x > 0$ lorsque f admet une limite finie L en $+\infty$.

On rappelle que, dans cette partie, la fonction continue f admet une limite finie L en $+\infty$.

(a) Démontrer les égalités suivantes pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt = \int_{\varepsilon x}^{Ax} \frac{f(u)}{u} du - \int_{\varepsilon}^A \frac{f(u)}{u} du = \int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u} du - \int_{\varepsilon}^{\varepsilon x} \frac{f(u)}{u} du.$$

(b) En effectuant un changement de variables dans ces deux dernières intégrales, en déduire que :

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{f(At)}{t} dt - \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt.$$

- (c) Établir qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ ayant une limite finie L en $+\infty$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
- (d) On **admet** que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{f(At)}{t} dt = L \ln(x)$ et que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt = f(0) \ln(x)$ (il n'y a donc pas de question).
- (e) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x .
Comparer le résultat ainsi obtenu au résultat particulier obtenu à la question 1.
3. Application aux cas où $f(t) = \arctan(t)$ et $f(t) = e^{-t}$.
- (a) Déterminer l'existence de la valeur de $F(x)$ lorsque : $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) = \arctan(t)$.
Que vaut l'intégrale $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(at) - \arctan(bt)}{t} dt$ où a et b sont strictement positifs ?
- (b) Déterminer l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque : $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) = e^{-t}$.

Partie II : étude de $F(x)$ lorsque l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

Dans toute cette partie, on suppose que l'intégrale impropre $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

4. Étude du cas particulier où l'intégrale impropre $J = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

On suppose plus spécifiquement dans cette question que l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

- (a) À l'aide d'un changement de variable, déterminer la nature et la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{f(xt)}{t} dt$.
- (b) En déduire la convergence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x .
5. Application au cas où $f(t) = \sin(t)$.
- (a) Démontrer la relation suivante pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_{\varepsilon}^A + \int_{\varepsilon}^A \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt.$$

- (b) Déterminer la limite de $\frac{1 - \cos(t)}{t}$ lorsque t tend vers 0, puis vers $+\infty$.
- (c) Déterminer la limite de $\frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ lorsque t tend vers 0, puis justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$, et enfin la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
- (d) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque : $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) = \sin(t)$.
6. Étude de $F(x)$ pour $x > 0$ lorsque l'intégrale impropre $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

On rappelle que, dans cette partie, l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

- (a) En raisonnant comme à la question 2, démontrer l'égalité suivante pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt = \int_A^{Ax} \frac{f(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt.$$

- (b) Déterminer la limite de $\int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u} du$ lorsque A tend vers $+\infty$.

- (c) On **admet** que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt = f(0)$ (il n'y a donc pas de question).

- (d) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x .

7. Application aux cas où $f(t) = e^{it}$ et $f(t) = \cos(t)$.

- (a) Démontrer la relation suivante pour $A > 1$:

$$\int_1^A \frac{e^{it}}{t} dt = \left[\frac{e^{it}}{it} \right]_1^A - i \int_1^A \frac{e^{it}}{t^2} dt.$$

- (b) En déduire, en la justifiant soigneusement, la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t} dt$.

- (c) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque : $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) = e^{it}$, puis lorsque : $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) = \cos(t)$.
-