Devoir maison n^{o} 3
MP
pour mardi 1er octobre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou $\boxed{\text{encadrer}}$ les résultats.
Bon travail !

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
↯ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ↯ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

I Questions de cours et exemples – ✍

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Donner la définition d'un polynôme annulateur de f.
2. *(5/2 uniquement)* Quelle est la structure de l'ensemble des polynômes annulateurs de f ?
3. Donner la définition du polynôme minimal de f, que l'on notera π_f.
4. Un premier exemple.
   Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de représentation matricielle dans la base canonique :
   $$M = (m_{i,j}) \text{ où } m_{i,j} = \frac{1}{4}(1 + (-1)^{i+j}) \text{ pour } (i, j) \in [\![1, 4]\!]^2$$
   Calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}^*$ et déterminer π_f.
5. ↯ Un second exemple.
   (a) Chercher les solutions à valeurs réelles des équations différentielles :
   $$y'' + y = \mathrm{ch}(x) \quad \text{et} \quad y'' + y = \mathrm{sh}(x)$$
   (b) On considère l'équation différentielle (H_1) : $y^{(4)} = y$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que f est solution de (H_1) si, et seulement si, la fonction $g = f'' + f$ est solution d'une équation différentielle du second ordre (H_2) que l'on déterminera.
   (c) Résoudre (H_2) et en déduire les solutions de (H_1).
   (d) On note alors E le sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles engendré par $(\cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$.
      i. Quelle est la dimension de E ?
      ii. Justifier que la dérivation induit sur E un endomorphisme δ.
      iii. Déterminer le polynôme minimal π_δ de δ.

Dans toute la suite, $E = \mathbb{R}[X]$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$. Lorsque f est un endomorphisme de E_n, on note χ_f son polynôme caractéristique.
Soit $u : P \in E \mapsto P'$ et $v : P \in E \mapsto P(X + 1)$.

II Quelques propriétés des endomorphismes u et v – ✍

6. Rappeler la dimension de E_n et en donner une base usuelle.
7. Montrer que u et v sont des endomorphismes de E qui laissent stables E_n. On note u_n et v_n les endomorphismes de E_n induits par u et v.
8. Écrire les matrices U_n et V_n de u_n et v_n dans la base canonique de E_n.
9. Préciser le noyau et l'image de chacun de ces endomorphismes.
10. Les endomorphismes u_n et v_n commutent-ils ?
11. Quel est le polynôme caractéristique de u_n ? u_n est-il diagonalisable ?
12. Quel est le polynôme caractéristique de v_n ? v_n est-il diagonalisable ?
13. On note $w_n = v_n - \mathrm{Id}_{E_n}$ et on pose :

$$Q_0 = 1 \text{ et pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ Q_k = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X - j)$$

    (a) Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (Q_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E_n.
    (b) Déterminer $w_n(Q_0)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel α_k non nul tel que

$$w_n(Q_k) = \alpha_k Q_{k-1}$$

    (c) Écrire la matrice W_n de w_n dans la base $\mathcal{B}$.
    (d) Donner une base de $\ker(w_n)$ et une base de $\mathrm{Im}(w_n)$.
    (e) Calculer $w_n^j(Q_k)$ pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$.
14. Détermination des coordonnées d'un polynôme de E_n dans la base $\mathcal{B}$.
    (a) Soit $P \in E_n$. Justifier l'existence et l'unicité d'une famille de scalaires $(\beta_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ telle que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k Q_k$.
    (b) Calculer $w_n^j(P)(0)$ pour $j \in \mathbb{N}$.
    (c) Exprimer alors les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.
    (d) Calculer w_n^{n+1} et $w_n^n(Q_n)$.

III Recherche de quelques polynômes minimaux – ✍

15. Soit $f \in \mathscr{L}(E_n)$. Justifier que π_f divise χ_f.
16. Recherche de π_{u_n}.
    (a) Déterminer u_n^{n+1}. Calculer $u_n^n(X^n)$. Conclure.
    (b) De même, déterminer le polynôme minimal de w_n.
17. Recherche de π_{v_n}.
    (a) Montrer qu'il existe $m \in [\![1, n+1]\!]$ tel que $\pi_{v_n} = (X - 1)^m$.
    (b) Prouver que $m = n + 1$.
18. ↯ Polynômes annulateurs de u.
    Soit P un polynôme de degré m écrit $P = \sum\limits_{j=0}^{m} a_j X^j$.
    (a) Que sait-on de a_m ?
    (b) On note r l'endomorphisme $P(u)$. Déterminer $r(\frac{X^m}{m!})$.
    (c) Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de u.
19. ↯ Polynômes annulateurs de v. Soit P un polynôme annulateur de v.
    (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(X - 1)^{n+1}$ divise P.

(b) Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de v.

20. ⚡ Soit s l'endomorphisme qui à tout polynôme P associe le polynôme $P(1-X)$.
    (a) Vérifier que s est une symétrie de E.
    (b) Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de s.

IV – ⚡

Soit f un endomorphisme de l'esapce vectoriel normé E. On rappelle que :

$$\exp(f) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^m}{m!}$$

21. Montrer que $v_n = \exp(u_n)$.
22. On va montrer dans cette question que $u_n = \sum\limits_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}(v_n - \mathrm{Id}_{E_n})^m$.
    (a) Prouver (en utilisant la question 14.c) que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ u_n(Q_k) = \sum_{m=0}^{k} u_n(Q_m)(0) Q_{k-m}$$

    (b) Calculer $u_n(Q_m)(0)$ pour $m \in [\![0, n]\!]$.
    (c) Conclure.
