Devoir maison n° 3
MP
pour mardi 3 octobre 2023

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !

Thème : comparaison série-intégrale

Préliminaire
Il faut avoir révisé la méthode de comparaison série-intégrale (page 5 du cours Séries) et il faut savoir montrer avec aisance que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ par cette technique.

Exercice 1

1. Montrer que pour g fonction continue et croissante sur $[0,1]$, on a pour tout $n \geqslant 1$:
$$\left| \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) \right| \leqslant \frac{g(1)-g(0)}{n}$$
2. Que déduit-on de cette inégalité ?

Exercice 2
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs et de limite nulle. On pose pour $n \in \mathbb{N}$:
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_{n+1}}{S_n}$$
1. Lorsque la série $\sum u_k$ converge, quelle est la nature de la série $\sum v_k$?
2. Étudier la nature de la série $\sum v_k$ lorsque la série $\sum u_k$ diverge. On pourra utiliser une comparaison série-intégrale.
3. Quel résultat obtient-on dans le cas où $u_n = \dfrac{1}{n}$?

Exercice 3

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$ converge.

On pose alors $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)k!}$.

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$|I - s_n| \leqslant \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}.$$

3. *Informatique :* écrire une fonction récursive `factorielle` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie l'entier $n!$.
4. *Informatique :* en déduire un script qui détermine un entier N, tel que $|I - s_N| \leqslant 10^{-6}$.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

1. En utilisant sa monotonie, étudier la convergence de la suite (u_n).
2. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln(u_n)$.
   (a) Prouver que l'on a : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$
   (b) En déduire que l'on a, pour tous entiers naturels k et n :
   $$0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$
   (c) En utilisant sa monotonie, montrer que la suite (v_n) converge vers une limite L que l'on ne cherchera pas à calculer.
3. On pose alors pour tout entier naturel n : $t_n = \mathrm{e}^{2^n L}$. Démontrer que l'on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} t_n$.
4. On pose alors pour tout entier naturel n : $s_n = t_n - u_n$.
   (a) Trouver une relation entre s_{n+1}, s_n et u_n.
   (b) Prouver que la suite (s_n) est bornée.
   (c) Montrer qu'il existe un réel b tel que l'on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} t_n + b + o(1)$.