

Devoir maison n° 2 MP

pour jeudi 25 septembre 2025



La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

✎ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✎ sont OBLIGATOIRES.

⚡ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ⚡ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✎

Avec le changement de variables $u = \tan x$, calculer $I = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + \tan x} dx$.

Exercice 2 – ✎

1. Soit a un réel > 0 . Déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{a^2 + t^2}$.
2. Montrer que pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\int_p^{p+1} \frac{dt}{n^2 + t^2} \leq \frac{1}{n^2 + p^2} \leq \int_{p-1}^p \frac{dt}{n^2 + t^2}$$

3. La famille $\left(\frac{1}{n^2 + p^2}\right)_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est-elle sommable ?
-

Exercice 3 – ⚡

On pose, pour tout entier naturel n , $C_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2n} dx$ et $D_n = \int_0^{\pi/2} x^2 (\cos x)^{2n} dx$.

1. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n - 1)(C_{n-1} - C_n)$.
On pourra écrire $\cos^{2n} x = \cos x \cos^{2n-1} x$.
2. Établir, pour tout entier naturel n non nul, les égalités :

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2} = \frac{C_n}{2n - 1} = \frac{C_{n-1}}{2n}$$

3. Établir pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n - 1) n D_{n-1} - 2n^2 D_n$.

4. En déduire, pour tout entier n non nul, l'égalité : $\frac{1}{n^2} = 2 \left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n} \right)$.
5. (a) Justifier, pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la minoration : $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$.
- (b) En déduire, pour tout entier naturel n , la majoration : $D_n \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{C_n}{2n+2}$.
6. Déduire de ce qui précède la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
-