Devoir maison n° 2
MP
pour mardi 24 septembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
↯ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ↯ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✍

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose : $u_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}$.

On se propose de montrer que la série de terme général u_n converge et de calculer sa somme.
On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $w_n = v_n - \ln(n)$.

1. Préliminaire : montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n - w_{n+1} \geqslant 0$.
   (b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de $\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$.
   (c) En déduire que, au voisinage de $+\infty$: $w_n - w_{n+1} = \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
3. (a) Montrer que la série de terme général $w_n - w_{n+1}$ est convergente.
   (b) En déduire que la suite (w_n) converge. On note γ sa limite.
4. Montrer que la série de terme général u_n converge.
5. (a) On rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \dfrac{1}{2}v_n - 1$.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \dfrac{6n}{n+1}$.
6. En utilisant la convergence de la suite (w_n), calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ en fonction de $\ln 2$.

Exercice 2 – ✍

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Donner les valeurs propres de f.
   (b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. (a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f^2) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id})$.
   (b) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (c) On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $g^2 = f$.
   On suppose pour cela qu'un tel endomorphisme existe.
   Établir que $\ker(f^2)$ est stable par g, puis montrer que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :
   $$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.$$
   En utilisant la matrice de f dans cette même base, trouver une contradiction et conclure.
3. *(Question facultative)* Étude d'un cas plus général.
   On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ (où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1) et on désigne par α un réel non nul.
   (a) On considère un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que $h^n = \alpha h^{n-1}$.
   Montrer que : $\mathbb{R}^n = \ker(h^{n-1}) \oplus \ker(h - \alpha\mathrm{Id})$.
   (b) Montrer réciproquement que, si un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ est tel que $\mathbb{R}^n = \ker(h^{n-1}) \oplus \ker(h - \alpha\mathrm{Id})$, alors on a : $h^n = \alpha h^{n-1}$.
