Devoir maison n° 2
MP
pour mardi 26 septembre 2023

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !

Exercice 1

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^x$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^n}$.
   (a) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   (b) Étudier la nature de la série de terme général u_n.
2. Pour n, p et k entiers naturels, on pose :
$$J_n = \int_0^1 (x\ln x)^n\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad K_{p,k} = \int_0^1 x^p(\ln x)^k\,\mathrm{d}x$$
   (a) Montrer que J_n et $K_{p,k}$ existent.
   (b) Pour k différent de 0, déterminer une relation entre $K_{p,k}$ et $K_{p,k-1}$.
   (c) En déduire la valeur de J_n en fonction de n.
3. (a) Donner, sur $]0,1]$, un majorant de la fonction qui à x associe $|x\ln x|$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à deux :
$$\left| I - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} J_k \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{e^{n+1}}$$
   On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle, par exemple sur l'intervalle $[-1,0]$.
   (c) En déduire : $I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$.
   (d) Avec `Python` et en présentant le programme utilisé, calculer avec une précision d'au moins 2×10^{-7} une valeur approchée de I.

Exercice 2 : Normes

Exercice A
Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on définit :
$$N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad N'(f) = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \qquad N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$$

1. Montrer que N'' est une norme sur E. On admet que N' est une norme. Quant à N, c'est une norme du cours (la norme uniforme).
2. Montrer que pour tout $f \in E$, $N(f) \leqslant N'(f) \leqslant N''(f)$.
3. Montrer que N et N' ne sont pas équivalentes, et que N'' et N' ne sont pas équivalentes.

Exercice B
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et N_1 et N_2 deux normes sur E. On considère :

$$B_1 = \{x \in E,\ N_1(x) < 1\} \qquad \text{et} \qquad B_2 = \{x \in E,\ N_2(x) < 1\}$$

Montrer l'implication : $B_1 = B_2 \ \Rightarrow\ N_1 = N_2$.

Exercice 3

Soient $f \in \mathbb{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge. Soient $a > 0$ et $b > 0$, avec $a < b$.

1. Montrer l'existence de l'intégrale $\int\limits_u^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))\,\mathrm{d}x$ pour tout réel u.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{u \to -\infty} \int_u^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+ae^x)(1+be^x)}\,\mathrm{d}x$.