Devoir maison n° 1
MP
pour jeudi 18 septembre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou $\boxed{\text{encadrer}}$ les résultats.
Bon travail !

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
↯ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ↯ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✍

On pourra utiliser sans justification que $2 < e^1 < 3$.

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$. On note pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

1. On note : $\forall n \geqslant 1,\ w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 lorsque x tend vers 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{1+x}$.
   (b) Montrer alors que : $w_{n+1} - w_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.
   (c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ, appelé **constante d'Euler**.
2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?
4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.
   (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :
   $$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_{n}^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geqslant 3}$ est décroissante et convergente.

5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

puis que :

$$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$$

6. Démontrer alors que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$$

Exercice 2 – ϟ

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. On dit que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) si

— $a_1 \geqslant 1$,

— la suite (a_n) est bornée,

— $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0$,

— la série $\sum a_n$ diverge.

On note alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ b_n = \frac{1}{\ln(A_n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k}$$

1. Énoncer le théorème de sommation des relations dans le cas d'une série divergente, pour la relation d'équivalence. On appelle (R) cette propriété dans la suite du sujet.
2. Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   En utilisant $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ et la propriété (R), prouver que :

$$H_n \sim \ln(n)$$

3. (a) De façon analogue, montrer que

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$$

   (b) En déduire la nature de la série de terme général $w_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ $(n \geqslant 2)$.
   (c) Retrouver ce résultat sans utiliser la propriété (R).
4. Étude de deux exemples.
   (a) On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 1$. Vérifier que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) et déterminer la limite de (b_n).
   (b) On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n}$. Vérifier que la suite (a_n) vérifie la propriété (P). En utilisant la propriété (R) et la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} w_n$, déterminer la limite de (b_n).
5. On revient au cas général et on considère une suite (a_n) qui satisfait à la propriété (P).
   (a) Montrer que $A_n \sim A_{n-1}$.

(b) Prouver que

$$\frac{a_n}{A_n} \sim \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)$$

(c) Déterminer alors la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \frac{a_n}{A_n}$.

(d) À l'aide de la propriété (R) et des questions précédentes, déterminer alors la limite de (b_n).

6. Soit u_n le terme général d'une série à termes strictement positifs divergente. Montrer qu'il existe une suite (v_n) à termes positifs tels que $v_n = o(u_n)$ et $\sum v_n$ diverge. *Indication : on commencera par le cas où la suite u est bornée. Si la suite u n'est pas bornée, on posera* $w_n = \min(u_n, 1)$.
