Devoir maison n° 1
MP
pour mardi 10 septembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
↯ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ↯ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✍

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. Montrer que la famille (I_p, A, A^2) est libre.

Exercice 2 – ✍

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

1. Montrer (sans utiliser le chapitre Réduction) que $F = \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Préciser un vecteur directeur u de F et un vecteur directeur v de G.
2. Sans calculs, déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B} = (u, v)$.
3. En déduire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter P, D et P^{-1}.
4. En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel n sous la forme d'un tableau matriciel.

Exercice 3– ↯

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout élément f de E, on note $U(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Soit $f \in E$, T-périodique. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. On suppose de plus dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que si f est T-périodique, il en est de même pour f'. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
4. Montrer que l'application U qui à $f \in E$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de E.
5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $B_n = (1, X, \ldots, X^n)$ sa base canonique.
   (a) Montrer que la restriction de U à E_n définit un endomorphisme U_n de E_n.
   (b) Écrire la matrice de U_n dans la base B_n.
   (c) L'endomorphisme U_n est-il bijectif ?
6. Justifier que, si f, élément de E, est dans $\ker(U)$, alors :
   (i) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
   (ii) f est périodique de période 1.
7. A-t-on : $\ker(U) = \left\{ f \in E, \text{ périodique de période 1 et telle que } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$?
8. Donner explicitement une fonction f non nulle, élément de $\ker(U)$.
9. L'endomorphisme U est-il surjectif ?
10. Soient a un réel non nul et f_a la fonction sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$.
   (a) Déterminer $F_a = U(f_a)$.
   (b) Dresser le tableau des variations de la fonction réelle : $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.
   (c) Montrer alors que tout réel $\lambda > 0$ est valeur propre de U.
