Devoir maison n° 1
MP
pour mardi 12 septembre 2023

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !

3 EXERCICES SONT À RENDRE, AU CHOIX.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan x)^{n+2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale u_n est bien définie.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. (a) Calculer $u_{n+2} + u_n$.
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n) et un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

1. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{k^2}$?
2. Établir l'encadrement suivant : $1 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $x_k = \dfrac{k\pi}{2n+1}$. On rappelle que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{cotan} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

3. (a) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $e^{2\mathrm{i}x} = \dfrac{\operatorname{cotan} x + \mathrm{i}}{\operatorname{cotan} x - \mathrm{i}}$.
   (b) En déduire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(\operatorname{cotan} x_k + \mathrm{i})^{2n+1}$ est un nombre réel.

4. Soit P_n le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P_n(X) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{n-p}$.
   (a) Préciser le degré de P_n ainsi que son terme de plus haut degré.
   (b) Pour tout réel t, déterminer sous forme de somme la partie imaginaire de $(t+i)^{2n+1}$. En déduire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{cotan}^2 x_k$ est une racine de P_n et donner une factorisation de $P_n(X)$.
   (c) Établir la formule : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 x_k = \frac{n(2n-1)}{3}$.

5. (a) Montrer que pour tout $u \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $\operatorname{cotan}^2 u \leqslant \dfrac{1}{u^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2 u$.

(b) Déduire des résultats précédents que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3 : intégrales généralisées

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(\frac{1}{x^2})}{\ln(1+\sqrt{x})}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1})\,\mathrm{d}x$ diverge.
3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x$ diverge.
4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left((1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{x}} - e + \frac{e}{2x}\right)\mathrm{d}x$ converge.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que l'intégrale suivante converge :
$$\int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + \frac{3}{2}x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + x + 1}\right)\mathrm{d}x$$

Exercice 4

On suppose que I est l'intervalle $[a, +\infty[$ et que f est continue sur I. On considère également deux applications $g : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continues sur I, ainsi que deux réels positifs ou nuls k et δ.

1. On suppose que, pour tout $x \in I$, $g(x) \geqslant 0$ et $f(x) \leqslant \delta + \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \left(\delta + \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)\exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
   (b) En déduire que, pour tout $x \in I$, on a : $f(x) \leqslant \delta \exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

   Cette question 1. ne ressert plus pour la fin de l'exercice.

2. On suppose maintenant que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant \varphi(x) + k\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
   En introduisant $H : x \mapsto \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)e^{-kx}$, montrer que, pour tout $x \in I$, on a l'inégalité :
$$f(x) \leqslant \varphi(x) + k\int_a^x \varphi(t)e^{k(x-t)}\,\mathrm{d}t$$

3. On suppose désormais que, pour tout $x \in I$, on a :
$$0 \leqslant f(x) \leqslant \delta(x-a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
   Justifier à l'aide de la question 2. que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)e^{-2x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.