Devoir maison n° 16
MP
pour mardi 12 mars 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !
Pour ce devoir, il est demandé de rendre l'exercice 2 et un autre exercice, au choix.

Exercice 1

1. Montrer que pour toute variable aléatoire Y définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant un moment d'ordre 2, on a :
$$Y \leqslant Y\mathbb{1}_{(Y\geqslant 0)} \text{ puis } E(Y) \leqslant \sqrt{E(Y^2)P(Y \geqslant 0)}$$
2. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, centrée et admettant une variance σ^2.
Déduire de la question précédente que : $\forall \varepsilon > 0,\ P(X > \varepsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$.
On appliquera la question précédente avec $Y = -X + \varepsilon$.

Exercice 2

On désigne par p un réel de $]0, 1[$ et on pose $q = 1-p$. On suppose dans ce problème que toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi que X. On considère aussi une variable aléatoire N telle que $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, indépendante des variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et possédant une espérance.
On pose $S = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a : $S(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$. On admet que S est une variable aléatoire définie aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. (a) Déterminer $S(\Omega)$.
   (b) Montrer, sans la calculer, que S possède une espérance.
2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Donner la loi de S_n ainsi que son espérance.
3. Établir l'égalité :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(S = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n = k)P(N = n)$$
4. Étude d'un exemple : on suppose dans cette question que N est une variable aléatoire telle que $N-1$ suit la loi de Poisson de paramètre λ.
   (a) Déterminer la loi de N.
   (b) Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(S = k) = \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} n \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}$$
   En déduire :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(S = k) = \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} (\lambda q + k) e^{-\lambda p}$$

(c) En déduire l'expression de $P(S=0)$ en fonction de λ, p et q.

Exercice 3 – pour chercher plus

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ un produit scalaire sur E et $x \mapsto \|x\|$ la norme euclidienne associée.
On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $(v_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de vecteurs unitaires (c'est-à-dire de norme 1) de E.

1. On suppose que les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont deux à deux orthogonaux.
   Montrer que pour tout n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, on a $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}$.

2. On ne suppose plus que les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont deux à deux orthogonaux.
   On lance une pièce de monnaie bien équilibrée n fois de suite et, pour $j \in [\![1,n]\!]$, on note :

$$X_j = \begin{cases} -1 & \text{si au } j\text{-ième lancer, la pièce retombe sur Face} \\ 1 & \text{si au } j\text{-ième lancer, la pièce retombe sur Pile} \end{cases}$$

   (a) On considère $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ avec $\Omega = \{\text{Pile, Face}\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P la probabilité uniforme sur Ω (équiprobabilité). Vérifier que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes pour la probabilité P. On se place dorénavant dans ce modèle.
   (b) Montrer que $U : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par la relation $U(\omega) = \|X_1(\omega)v_1 + X_2(\omega)v_2 + \cdots + X_n(\omega)v_n\|^2$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
   Cette variable aléatoire U pourra être notée $\|X_1 v_1 + X_2 v_2 + \cdots + X_n v_n\|^2$.
   (c) Déterminer $E(U)$ (réponse $E(U) = n$).
   En déduire qu'il existe un n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| \leqslant \sqrt{n}$.

   (d) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
      i. pour tout n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}$;
      ii. la famille $(v_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est orthonormale.

   On commencera par prouver que, pour tout couple $(a,b) \in E^2$, $\|a+b\|^2 = \|a-b\|^2$ si et seulement si a et b sont orthogonaux. Autrement dit, les diagonales d'un parallélogramme $\mathcal{P}$ sont d'égales longueurs si et seulement si $\mathcal{P}$ est un rectangle.
   (e) En déduire que si les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ne sont pas deux à deux orthogonaux, il existe un n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| > \sqrt{n}$.

Exercice 4

Toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $\alpha > 0$, on dit qu'une variable aléatoire X est *α-sous-gaussienne* si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad E\left(\exp(tX)\right) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

On rappelle la notation : $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(t) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$. On pourra au préalable établir le développement de la fonction ch en série entière sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1, 1]$, on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t).$$

3. Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 (c'est-à-dire que $|X| \leqslant 1$) et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne.
   En déduire que si X est bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.
4. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes, et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} (\mu_i)^2 = 1$.

   Montrer que la variable aléatoire $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i X_i$ est aussi α-sous-gaussienne.
5. Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$:

$$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right).$$

   En déduire que :

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

6. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, montrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geqslant k)$ converge et que dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k) \leqslant E(X) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k)$$

   On pourra pour cela considérer la partie entière $\lfloor X \rfloor$.

Pour tout $s \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(s) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$.

7. Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\beta > 0$. Montrer que pour tout entier $k > 0$:

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^{\,2}}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2k^{-\eta}$$

   où on a posé $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$. En déduire que si $\alpha\beta < 1$, la variable aléatoire $\exp(\frac{\beta^2 X^{\,2}}{2})$ est d'espérance finie majorée par $1 + 2\zeta(\eta)$.

En particulier, en prenant $\alpha\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et en utilisant l'inégalité $1 + 2\zeta(2) \leqslant 5$ (que l'on ne demande pas de justifier), on obtient immédiatement, et on l'admet, que si X est une variable aléatoire α-sous-gaussienne, on a *l'inégalité d'Orlicz* :

$$\boxed{E\left(\exp\left(\frac{X^{\,2}}{4\alpha^2}\right)\right) \leqslant 5.}$$